টুমরো সিরিজ

নিউরনে অনুরণন

মুহম্মদ জাফর ইকবাল
মোহাম্মদ কায়কোবাদ

CONVERTED TO PDF

BY

---RoNy

E-mail: tanvir_ahmad_rony@yahoo.com

(c) **Tanvir Ahmad rony**

Mechanical Engineering , Batch -2004

KUET

কী এবং কেন ?

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

আমাদের দেশের ছেলে-মেয়েরা পৃথিবীর সেরা। কিন্তু আমি যখন দেখি তাদের সৃজনশীলতাকে পুরোপুরি নষ্ট করে দিয়ে তাদের ঘাড়ে মোটা মোটা বই চাপিয়ে দেওয়া হচ্ছে মুখস্ত করার জন্য, তখন দুঃখে আমার বুকটা ভেঙে যায়। আমি হয়তো আমার কাছাকাছি দু-চারজনকে উৎসাহ দিতে পারি, সাহায্য করতে পারি। কিন্তু দেশের হাজার হাজার ছেলে-মেয়েকে সাহায্য করবে কে ? তাই অনেক ভাবনা-চিন্তা করে আমি আর প্রফেসর কায়কোবাদ একটা বুদ্ধি বের করেছি। আমরা ঠিক করেছি, প্রতি সপ্তাহে খবরের কাগজে মজার মজার পাঁচটি অঙ্ক তুলে দেব— এ দেশের ছেলে-মেয়েরা সেগুলো নিজে নিজে করার চেষ্টা করবে। এই অঙ্কগুলোর কোনো কোনোটা হবে সোজা, কোনো কোনোটা হবে কঠিন, কোনো কোনোটা হবে ইতিহাস বিখ্যাত, কোনো কোনোটা হবে আনন্দময় আবার কোনো কোনোটা হয়তো হবে একেবারেই অসাধ্য! এ দেশের ছেলে-মেয়েরা সেগুলো করতে গিয়ে চিন্তা করতে শিখবে, সৃজনশীলতা বাড়বে, কল্পনাশক্তির বিকাশ হবে। তারা আবিষ্কার করবে অঙ্ক করা যতটুকু মজার ব্যাপার, তার থেকে একশ গুণ বেশি মজা সেই অঙ্কটি নিয়ে চিন্তা-ভাবনা করা। সেটা করতে গিয়ে প্রতিনিয়ত তাদের মস্তিষ্কে নিউরনের অনুরণন হতে থাকবে। তাই এই প্রোগ্রামটির নাম দিয়েছি নিউরনে অনুরণন!

আমরা ঠিক করেছি, এই সমস্যার সমাধানগুলো আমরা কখনোই বলে দেব না, যেন সেগুলো কখনোই পুরনো হয়ে না যায়। কেউ যদি ঠিক করে অঙ্কগুলো করতে পারে তাহলে তাদের জানানোর ব্যবস্থা করা হবে— এটি ঠিক হয়েছে, কিন্তু তার বেশি নয়। যারা নিজেদের সময় নিয়ে অঙ্কগুলো করবে তারা নিজেরাই বুঝতে পারবে কতদূর এগিয়েছে— যার অর্থ এটি হবে নিজেদের সঙ্গে প্রতিযোগিতা। আমরা শুধু মজার মজার অঙ্ক খুঁজে বের করে সাহায্য করব। এর মাঝে ফাঁকি দেওয়ার কোনো জায়গা নেই। কারণ ফাঁকি দিতে হলে সেটা নিজেকেই দিতে হবে— মানুষ আর যাই করুক, কখনো নিজেকে ফাঁকি দেয় না। আমরা যার সঙ্গেই আমাদের এই পরিকল্পনাটি নিয়ে কথা বলেছি, সে-ই আমাদের খুব উৎসাহ দেখিয়েছেন। তাই আমাদের ধারণা, দেশের ছেলে-মেয়েদের সৃজনশীলতা বাড়িয়ে

তোলার এই উদ্যোগে অনেকেই হয়তো সহযোগিতার হাত বাড়িয়ে দেবেন। আমাদের বুদ্ধি-পরামর্শ দেবেন, নতুন নতুন মজার অঙ্ক খুঁজে বের করে দেবেন। ছেলে-মেয়েদের পাঠানো উত্তরগুলো যাচাই করে দেবেন এবং কে জানে হয়তো প্রকাশকরা বছরের শেষে অঙ্কগুলো সম্পাদনা করে বই প্রকাশ করে দেবেন কিংবা বড় কোনো প্রতিষ্ঠান বছরের শেষে সেরা অঙ্কবিদদের নিয়ে একটা Math Olympiad করার জন্য এগিয়ে আসবে। সারা দেশ থেকে ক্ষুদে ক্ষুদে অঙ্কবিদরা এসে পেন্সিল কামড়াতে কামড়াতে অঙ্ক করছে— এর চেয়ে চমৎকার দৃশ্য আর কী হতে পারে?

পুরো ব্যাপারটা খুব সহজ হতো আমরা যদি এর জন্য ইন্টারনেট ব্যবহার করতাম। কিন্তু আমাদের দেশের বেশিরভাগ ছেলে-মেয়ে থাকে গ্রামে। ইন্টারনেট দূরে থাকুক, তাদের অনেকেই হয়তো খবরের কাগজটুকুও ভালো করে দেখতে পায় না। তবু যেটুকু সম্ভব হয় সেটুকুই পাওয়ার জন্য আমরা আপাতত একটি খবরের কাগজ দিয়ে সাহায্য করছি। আশা করছি, অন্য কাগজগুলোও আমাদের এই পরিকল্পনায় সাহায্যের জন্য এগিয়ে আসবে। পৃথিবীর সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী ছিলেন আইনস্টাইন। তিনি বলেছিলেন, জ্ঞানের থেকেও বড় হচ্ছে কল্পনাশক্তি। আমরা আমাদের দেশের ছেলে-মেয়েদের সেই কল্পনাশক্তি, সেই সৃজনশীলতাকে আর নষ্ট হতে দিতে চাই না। নিউরনে অনুরণন' সেই লক্ষ্যে একটি ছোট্ট প্রচেষ্টা, তার বেশি কিছু নয়।

প্রথম আলো, ১৭ জুন ২০০১

মেধার বিকাশে

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

অনেক দিন ধরেই স্বস্তি পাচ্ছিলাম না এই ভেবে যে, আমাদের দেশের ছেলে-মেয়েদের মেধার বিকাশে তেমন কোনো অবদান রাখতে পারছি না। যথাযথ উদ্যোগের অভাবে আমাদের মেধাবী ছেলেমেয়েদের মেধার বিকাশ হচ্ছে না। শুধু এই আক্ষেপের কথা শোনার জন্য নয়, এ অবস্থা থেকে পরিত্রাণের উপায় খুঁজতে অধ্যাপক জাফর ইকবালের তুলনা নেই। বিজ্ঞানের কল্পকাহিনী লিখে জাফর ভাই আমাদের কোমলমতি ছেলে-মেয়েদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তুলছেন, গল্প-উপন্যাস লিখে তিনি ছেলেমেয়েদের যুক্তিনির্ভর করছেন এবং উন্নততর মূল্যবোধ তৈরিতে অসামান্য অবদান রাখছেন, বিজ্ঞানের এক্সপেরিমেন্টের সিডি তৈরি করে বিজ্ঞান শেখায় তাদের আগ্রহী করে তুলছেন, পত্রপত্রিকায় সুচিন্তিত কলাম লিখে আমাদের জরাজীর্ণ শিক্ষা ব্যবস্থাকে উন্নতি ও উৎকর্ষের পথ দেখাচ্ছেন। আমাদের ছেলে-মেয়েদের মেধাকে কীভাবে বিকশিত করা যায় এ নিয়ে জাফর ভাইয়ের সঙ্গে অনেক আলোচনা হয়েছে। আমরা একমত হয়েছি বিভিন্ন দেশে গণিতের যে অলিম্পিয়াড হয় আমরাও এ রকম একটা কিছু করব। সুন্দর সুন্দর সমস্যা দিয়ে আমাদের ছেলেমেয়েদের মধ্যে সমস্যা সমাধানের সংস্কৃতি তৈরি করব, তাদের নিউরনে অনুরণন ঘটবে, তাদের সমস্যা সমাধানের ক্ষমতা বৃদ্ধি পাবে। মুখস্ত শক্তিনির্ভর এবং বইয়ের বোঝা চাপানো শিক্ষা ব্যবস্থার ধীরগতির গরলায়ন থেকে আমাদের ছেলে-মেয়েদের বাঁচাতে হলে এরকম একটি উদ্যোগের খুবই প্রয়োজন। বিভিন্ন দেশে ছোট ছোট ছেলে-মেয়েদের মেধার বিকাশে হরেক রকম উদ্যোগ নেওয়া হয়। পূর্ব ইউরোপে গণিতের অলিম্পিয়াড দীর্ঘদিন ধরে চলে আসছে, হাঙ্গেরির গণিত অলিম্পিয়াড জগদ্বিখ্যাত। গণিত ও দাবায় হাঙ্গেরিতে বিস্ময়কর শিশু প্রতিভার অহরহ জন্মের সঙ্গে বিভিন্ন রকম প্রতিযোগিতা অনুষ্ঠানের একটি বিরাট ভূমিকা রয়েছে বলে অনেকেই মনে করেন। গ্রাফথিউরির দীর্ঘদিনের সমস্যা সমাধানকারী সাত বছর বয়সী পোজা কিংবা পোলগার ভগ্নিত্রয় এর জ্বলন্ত উদাহরণ। বিস্ময়কর দাবা প্রতিভা তৈরিতে অধুনালুপ্ত সোভিয়েত রাশিয়ার দাবা স্কুলগুলোও একই রকম ভূমিকা পালন করেছে। যুক্তিনির্ভর প্রতিযোগিতার কারণেই আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড কিংবা এসিএম প্রোগ্রামিংয়ের বিশ্ব চ্যাম্পিয়নশিপে

রাশিয়ানদের এমন নিরঙ্কুশ আধিপত্য। চীন ও কোরিয়ার ছেলে-মেয়েরাও গণিতের অলিম্পিয়াড কিংবা আন্তর্জাতিক ইনফরমেটিক্স অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণ করে তাদের মেধার বিকাশ ঘটাচ্ছে। তাদের সমস্যা সমাধানের ক্ষমতাও বৃদ্ধি পাচ্ছে। কোরিয়া অ্যাডভান্সড ইনস্টিটিউট অব সায়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজির স্বনামধন্য অধ্যাপক চোয়ার সঙ্গে আলাপে জানতে পারলাম যে, প্রোগ্রামিং প্রতিযোগিতায় কোরিয়ান ছাত্রদের সাফল্যের পেছনে স্কুল-কলেজের ছাত্রদের জন্য আয়োজিত বিভিন্ন প্রতিযোগিতা একটি জোরালো ভূমিকা পালন করছে। চৈনিকদের সাফল্যের পেছনেও একই কারণ। গত বছরই চীনে আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড অনুষ্ঠিত হলো, আন্তর্জাতিক ইনফরমেটিক্স অলিম্পিয়াড কোরিয়াতে অনুষ্ঠিত হবে আগামী বছর। ভারতে কয়েক বছর আগেই আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড অনুষ্ঠিত হলো। এই প্রতিযোগিতাসমূহে বাংলাদেশের ছেলে-মেয়েদের উপস্থিতি দুঃখজনকভাবে নেই। প্রায় প্রতিটি আন্তর্জাতিক প্রতিযোগিতায় আমাদের সাফল্য উল্লেখ করার মতো নয়। তারপরও অংশগ্রহণের উদারতা আকাশছোঁয়া। বুদ্ধিভিত্তিক প্রতিযোগিতায় কিন্তু অবস্থান বেশ সবল। ১২-১৩টি দেশের মধ্যে আমাদের নিয়াজ মোর্শেদ প্রথম গ্র্যান্ডমাস্টার। বিগত চার বছর এসিএম-এর আঞ্চলিক ও বিশ্বচ্যাম্পিয়নশিপে বাংলাদেশী ছাত্রদের সাফল্য অসামান্য। ১৯৯৯ ও ২০০০ সালে আইআইটি কানপুরে অনুষ্ঠিত প্রতিযোগিতায় বাংলাদেশের দলসমূহের যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান এবং প্রথম ও তৃতীয়স্থান বাংলাদেশী ছাত্রদের প্রোগ্রামিং দক্ষতার অসামান্য প্রতিফলন। প্রতিবারই এসিএম-এর বিশ্বচ্যাম্পিয়নশিপে অংশগ্রহণের যোগ্যতা অর্জন করে বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্ররা বিশ্বমানের প্রোগ্রামিং মেধার স্বীকৃতি পেয়েছে এবং বাংলাদেশের সম্মান বৃদ্ধি করেছে। বুদ্ধিভিত্তিক, মেধাভিত্তিক প্রতিযোগিতায় বাংলাদেশের ছাত্রছাত্রীদের প্রশংসনীয় সাফল্য থাকলেও এই মেধা বিকাশে সরকারি উদ্যোগ লক্ষ্য করা যাচ্ছে না। বাংলাদেশের কর্মহীন, উৎপাদনহীন পরিবেশে আমাদের ছেলে-মেয়েদের জন্য এরকম একটি উদ্যোগ খুবই জরুরি। যে দেশে যখন-তখন হরতাল-ধর্মঘট হয় যে-কোনো খোঁড়া যুক্তিতে যে দরিদ্র দেশে আমরা কাজ বন্ধ করে দেই সেই দেশের কোমলমতি ছেলে-মেয়েরা যাতে এই অশুভ সংস্কৃতির শিকার না হয় তার জন্য তাদের অলস সময়কে মেধা ও বুদ্ধির চর্চায় ব্যস্ত করাটা আমাদের উদ্দেশ্য। রাশিয়াতে দেখেছি ট্রামে, বাসে, ট্রলিতে বসার জায়গা নেই, অশীতিপর বৃদ্ধ পর্যন্ত এক হাতে ভারসাম্য বজায় রেখে আরেক হাতে বই

ধরে পড়ছে। এটা একটি সংস্কৃতি। আমরাও বাংলাদেশে একটি নতুন সংস্কৃতির সূচনা দেখতে চাই যেখানে অবসর সময়ে ব্যস্তহীন সময়ে বাংলাদেশের ছোট ছোট ছেলে-মেয়েরা একটি ধাঁধার বইয়ের ধাঁধার সমাধান খুঁজবে, নয়তো গণিতের অলিম্পিয়াডের কোনো সমস্যা সমাধানের পথ খুঁজবে, নয়তো কোনো যুক্তিনির্ভর সমস্যার সমাধান খুঁজবে। সমস্যা সমাধান করাটাই এখানে বড় কথা নয়, সমস্যা সমাধানের চেষ্টায় নিউরনগুলোর যে অনুরণন ঘটবে সেটাই আসল কথা। এটা আমাদের ছেলে-মেয়েদের একটি নতুন দৃষ্টিভঙ্গি পেতে, দর্শনে আলোকিত হতে সাহায্য করবে।

কিছুদিন আগে এ বিষয়ে আলাপ আলোচনার সময় প্রথম আলোর অত্যন্ত উদ্যোগী সম্পাদক মতিউর রহমান সাহেব আগ্রহ দেখিয়ে আমাদের উৎসাহিত করেছেন বলে তাঁকে আন্তরিকভাবে ধন্যবাদ জানাচ্ছি। পত্রিকায় সমস্যা ছাপিয়ে আমাদের নিউরনে অনুরণন-এর যাত্রা শুরু করব। আশা করি স্কুল-কলেজের শিক্ষক ও অভিভাবকগণ আমাদের এই উদ্যোগে অংশগ্রহণ করার জন্য ছাত্রছাত্রীদের উৎসাহিত করবেন। আমাদের এই উদ্যোগে অংশগ্রহণের জন্য ছাত্র হওয়ারও দরকার নেই। এই যুক্তি বুদ্ধির ব্যবহারের অভাবেই সম্ভবত জাতিটিকে নিয়ে আমরা এমন ক্রান্তিলগ্নে পৌঁছেছি। আশা করি, ছেলে-মেয়েদের অংশগ্রহণে নিউরনে অনুরণন গতিপ্রাপ্ত হবে, আমরা আমাদের এই প্রয়াসকে ব্যাপকতর করব, বাংলাদেশের অগ্রগতিতে নিউরনে অনুরণন একটি বলিষ্ঠ ভূমিকা পালন করবে।

প্রথম আলো ১৭ জুন ২০০১

রামানুজন

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

রামানুজনের নাম খুব বেশি মানুষ জানে না। সাধারণ মানুষের কাছে পরিচিত হতে হলে যেসব আকর্ষণের দরকার হয় তার কিছুই রামানুজনের নেই। মদ্রাজের এক গরিব গোঁড়া হিন্দু পরিবারে জন্ম, পড়াশোনা বেশি নয়, ম্যাট্রিক পাশ করেছিলেন কিন্তু কলেজ পর্যন্ত যেতে পারেন নি। ছোটখাটো মানুষ পোশাক-পরিচ্ছেদে নজর নেই। নিজে গোঁড়া হিন্দু মাছ মাংস ছুঁয়ে পর্যন্ত দেখেন না। শিল্প-সাহিত্যে উৎসাহ নেই, একাউন্ট অফিসের কেরানি হিসেবে কাজ করেছেন দীর্ঘকাল। যক্ষ্মা রোগে ভুগে ভুগে মারা গেছেন মাত্র তেত্রিশ বছর বয়সে। এরকম একটি চরিত্র সাধারণ মানুষকে আকর্ষণ করবে কেন ? সাধারণ মানুষ তার নাম শুনে কী করবে ?

রামানুজন

তাই সাধারণ মানুষ রামানুজনের নাম জানে না, রামানুজনের নাম জানে শুধু গণিতবিদেরা। পৃথিবীর প্রতিটি গণিতবিদ রামানুজনের নাম শুনে শ্রদ্ধায় মাথা নত করে, করবে না কেন, রামানুজন ছিলেন পৃথিবীর সর্বকালের সর্বযুগের শ্রেষ্ঠ গণিতবিদদের একজন, তাকে বলা হয় গণিতবিদদের গণিতবিদ।

রামানুজনের জন্ম নিয়ে একটা গল্প প্রচলিত আছে। তার মা-বাবার কোনো ছেলে মেয়ে ছিল না বলে হিন্দুধর্মের এক দেবী 'নামগিরি'র কাছে সন্তানের জন্য প্রার্থনা করা হয়। তার কিছু দিন পর, ১৮৮৭ সনের ২২ ডিসেম্বর রামানুজনের জন্ম হলে তার মা-বাবা সেটিকে দেবীর আশীর্বাদ হিসেবে বিশ্বাস করে নেন। তার পুরো নাম শ্রীনিবাসা রামানুজন আয়েংগার। বড় হলে নামকরা গণিতবিদ হবেন তাই খুবই স্বাভাবিকভাবে ছেলেবেলা থেকেই তার অংকে ঝোঁক দেখা দেয়। স্কুলে থাকতেই পাই-এর মান বা দুই এর বর্গমূল দশমিকের পর যত খুশি ঘর পর্যন্ত বলে তার বন্ধুদের অবাক করে দিতেন। রামানুজনের বয়স যখন পনেরো তখন তার এক বন্ধু তাকে 'সিনোপসিস অফ পিওর ম্যাথেমেটিক্স' নামে একটা বই জোগাড় করে দিয়েছিলেন। বইটি এমন কিছু আহামরি বই নয়, অংক শেখার জন্য তো নয়ই। সেটিতে এলজেবরা, জ্যামিতি, ত্রিকোণোমিতি আর ক্যালকুলাসের ছয় হাজার

থিওরেম একত্র করে দেয়া ছিল। রামানুজন বসে বসে তাই পড়তেন আর সেগুলো পড়তে পড়তেই তার প্রতিভার দ্বার খুলে গিয়েছিল।

রামানুজন ছাত্র বেশ ভালো ছিলেন, ম্যাট্রিক পরীক্ষায় পাশ করছিলেন স্কলারশীপ পেয়ে। কিন্তু ভারতবর্ষ তখন ইংরেজ উপনিবেশ— তাই প্রভু ইংরেজের মুখের ভাষা ইংরেজি না জানলে পড়াশোনা করা যায় না, সেটিতে রামানুজনের মোটে উৎসাহ নেই। ফলস্বরূপ তিনি আর কিছুতেই কলেজ পাশ করতে পারলেন না। এক সময় সব কিছু ছেড়েছুড়ে তিনি অংক নিয়ে ব্যস্ত হয়ে গেলেন। সংসারের কিছুতে তার উৎসাহ নেই, দিনরাত শুধু অংক আর অংক। মা-বাবা ভাবলেন ছেলেকে বিয়ে দিলে সংসারে মন হবে। তাই বাইশ বছর বয়সে তাকে বিয়ে দিয়ে দেয়া হলো।

রামানুজন হঠাৎ করে আবিষ্কার করলেন তার একটি সংসার হয়েছে, সংসার চালানোর জন্যে তাকে টাকা উপার্জন করতে হবে, অংক নিয়ে ডুবে থাকলে আর চলবে না। তার মাথায় আকাশ ভেঙে পড়ল, তিনি যে অংক ছাড়া আর কিছুই জানেন না, পড়াশোনা ম্যাট্রিক পর্যন্ত, কী করবেন তিনি ? সবাই বলল, চাকরি খোঁজ, কিন্তু কী চাকরি করবেন তিনি ?

একজন রামানুজনকে বুদ্ধি দিল রামচন্দ্র রাও নামে একজন কালেক্টরের সাথে দেখা করতে, ভদ্রলোক নাকি রামানুজনের মতো অংকের ভক্ত। রামানুজন তার অংকের খাতা বগলে নিয়ে রামচন্দ্র রাওয়ের সাথে দেখা করতে গেলেন। তাকে মুগ্ধ করার জন্যে রামানুজন তার বড় বড় আবিষ্কারগুলো বোঝানোর চেষ্টা করলেন, লাভের মাঝে লাভ হলো যে রামচন্দ্র তার একটি কথাও বুঝতে পারলেন না। রামানুজন হাল ছাড়লেন না। পরের দিন আবারো গিয়ে হাজির হলেন। এবারে শুরু করলেন খুব সহজ জিনিস দিয়ে, আস্তে আস্তে কঠিন জিনিসের দিকে গেলেন। ইলিপটিকেল ইনটেগ্রাল হাইপার জিওমেট্রিক সিরিজ সবশেষে ডাইভারজেন্স সিরিজ। পৃথিবীর মানুষ তখনো সেটার কথা জানে না। রামচন্দ্র রাও হতবাক হয়ে গেলেন, তিনি বুঝতে পারলেন তার সামনে বসে থাকা এই বেকার ছেলেটি একজন অসামান্য প্রতিভাবান গণিতবিদ। তিনি রামানুজনকে জিজ্ঞেস করলেন তার কী প্রয়োজন।

রামানুজনের প্রয়োজন খুব কম, তিনি গণিতবিদের সম্মান বা প্রতিষ্ঠা চান না, কোনোভাবে শুধু খাওয়া পরার ব্যবস্থাটা করতে চান যেন নিজের মনে অংকে ডুবে থাকতে পারেন। কিন্তু ব্যাপারটি এত সহজ হলো না। রামানুজন কারো জন্যে বাঁধাধরা কাজ করতে পারেন না, তাই রামচন্দ্র রাও অনেক চেষ্টা করেও রামানুজনের জন্যে একটা বৃত্তির ব্যবস্থা করতে পারলেন না। রামানুজন বাধ্য হয়ে

মাদ্রাজের পোর্ট ট্রাস্টে একটা কেরানির চাকরি নিলেন। চাকরির ফাঁকে ফাঁকে যতটুকু সময় পাওয়া যায় তিনি তার অংক নিয়ে ব্যস্ত থাকেন। তার বয়স যখন তেইশ বৎসর তখন জার্নাল অফ ইন্ডিয়ান ম্যাথেমেটিক্যাল সোসাইটিতে তার প্রথম লেখা প্রকাশিত হয়।

এদিকে রামচন্দ্র অনেককে রামানুজনের অসামান্য প্রতিভার কথা গল্প করেছেন। সবাই মিলে ঠিক করলেন রামানুজনের কেমব্রিজের অংকের অধ্যাপক জি. এইচ. হার্ডিকে চিঠি লেখা উচিত। হার্ডি তখন ট্রিনিটি কলেজের ফেলো জগৎজোড়া তার নাম। রামানুজন ভয়ে ভয়ে একটা চিঠি লিখলেন। তার ইংরেজি খুব খারাপ, তাই বন্ধু বান্ধব চিঠির ভুলত্রুটি শুধরে দিল। চিঠিটা অনেকটা এরকম,

জনাব

অধীনের বিনীতি নিবেদন এই যে, আমি মাদ্রাজের পোর্টট্রাস্টে একজন কেরানি, মাসিক বেতন দেড় পাউন্ড। আমার বয়স তেইশ (আসলে তখন তার বয়স পঁচিশ)। আমার শিক্ষাগত যোগ্যতা বেশি নয় কিন্তু আমি অবসর সময়ে অংক চর্চা করিয়া থাকি। আমি ডাইভারজেন্স সিরিজের ওপরে একটু কাজ করিয়াছি তার ফলাফল স্থানীয় গণিতবিদরা 'অসাধারণ' বলিয়া মনে করিতেছেন। আমি আপনাকে আমার কিছু ফলাফল লিখিয়া পাঠাইলাম। আমি অত্যন্ত দরিদ্র, তাই যদি এইগুলোর কোনো প্রকার গুরুত্ব রহিয়াছে মনে করেন আপনি তাহা প্রকাশের দায়িত্ব নিলে কৃতজ্ঞ থাকিব। আমার অভিজ্ঞতা অত্যন্ত অল্প তাই আপনার উপদেশ আমার কাছে অত্যন্ত মূল্যবান বলিয়া বিবেচিত হইবে।

আপনার মূল্যবান সময় নষ্ট করিবার জন্য আন্তরিক দুঃখিত।

বিনীত, আপনার একান্ত অনুগত
রামানুজন

চিঠির শেষে হাতে লেখা ১২০টা থিওরেম!

সুদূর ভারতবর্ষের এক কোনা থেকে লেখা অচেনা একজন কেরানির এই চিঠি পেয়ে হার্ডির আক্কেল গুড়ুম। তিনি নিজে অসাধারণ গণিতবিদ, থিওরেমগুলিতে একবার চোখ বুলিয়েই বুঝতে পারলেন পৃথিবীতে একজন অসাধারণ গণিতবিদের আবির্ভাব হয়েছে। রামানুজনের থিওরেমগুলির কোনো কোনোটি তিনি আগে

দেখেছেন, কোনো কোনোটি পৃথিবীর অন্য বড় গণিতবিদরা প্রমাণ করে রেখে গেছেন, রামানুজন জানতেন না বলে নিজে আবার করেছেন। কয়েকটা থিওরেম হার্ডি নিজে অনেক কষ্টে প্রমাণ করে দেখলেন কিন্তু বেশিরভাগই তার নাগালের বাইরে। সবকিছু দেখে তিনি একেবারে স্তম্ভিত হয়ে গেলেন, তিনি তাড়াতাড়ি রামানুজনের সাথে যোগাযোগ করলেন।

শেষ পর্যন্ত দেশে রামানুজনকে খানিকটা স্বীকৃতি দেয়া হলো। এই উপমহাদেশের শিক্ষিত সমাজ বরাবরই সাদা চামড়ার বড় ভক্ত। তাই হার্ডির স্বীকৃতি পাওয়ার পর তাদের টনক নড়ল, তারা তাড়াতাড়ি রামানুজনকে একটা বৃত্তি পাইয়ে দিল। নোবেল প্রাইজ পাবার আগে কবি রবীন্দ্রনাথেরও দেশে অনেক জ্বালা যন্ত্রণা সহ্য করতে হয়েছিল, দীর্ঘদিন ইংরেজের দাসত্ব করে এটি হয়েছে, এখন এটি কমে যাওয়ার কথা কিন্তু দুর্ভাগ্যক্রমে তা সত্যি নয়।

হার্ডি চেষ্টা করতে থাকলেন রামানুজনকে কেমব্রিজ নিয়ে আসতে, কিন্তু রামানুজন কিছুতেই রাজি হন না। তিনি গোঁড়া হিন্দু, সমুদ্র পাড়ি দিলে জাত নষ্ট হবার ভয় আছে। সমস্যার সমাধান হলো আশ্চর্যভাবে, তার মা স্বপ্নে দেখলেন নামগিরি দেবী তার ছেলেকে আশীর্বাদ করে বিদেশ যেতে বলছে। রামানুজন কেমব্রিজ হাজির হলেন।

রামানুজনকে স্বচক্ষে দেখে হার্ডির দ্বিতীয়বার আক্কেল গুড়ুম হলো। এতবড় একজন গণিতবিদ কিন্তু আধুনিক অংকশাস্ত্রের কিছুই তিনি জানেন না। হার্ডির নিজের ভাষায়, এটা হচ্ছে একটা মস্ত বড় ধাঁধা— তাকে আধুনিক অংক শাস্ত্র কীভাবে শেখানো যায়? রামানুজনের অংকে যে পরিমাণ দখল ঠিক সে পরিমাণ দুর্বলতা! এই যে ব্যক্তিটি, যে মডুলার ইকুয়েশান সমাধান করতে পারে, অচিন্তনীয় সূক্ষ্মভাবে কমপ্লেক্স গুণন করতে পারে, চলমান ভগ্নাংশে যার জ্ঞান পৃথিবীর যে কোনো গণিতবিদের কল্পনার বাইরে, যে নিজে নিজে জেটা ফাংশনের কার্যকরী সমীকরণ বের করেছে যে নাম্বার থিওরির অসংখ্য বিখ্যাত সমস্যা সমাধান করেছে সেই একই ব্যক্তি ডাবল পেরিওডিক ফাংশান বা কশির থিওরেমের নাম শুনে নি, কমপ্লেক্স ভেরিয়েবলের মতো সাধারণ ব্যাপার সম্পর্কে তার বিন্দুমাত্র ধারণা নেই। গাণিতিক সমাধান কী জিনিস সে সম্পর্কে তার নিজের ধারণা ভীষণ অস্পষ্ট! তার সমস্ত গাণিতিক সমাধান তা নতুন হোক আর পুরাতন হোক, ভুল হোক আর শুদ্ধ হোক সবসময়েই করা হয়েছে আশ্চর্য গোলমেলে একটা জগাখিচুড়ি জাতীয় যুক্তিতর্ক দিয়ে, ভাসাভাসা অনুমান আর আন্দাজ দিয়ে, সবচেয়ে মজার কথা সে নিজে পরিষ্কার করে কখনো কাউকে সেটা বোঝাতে পারে নি।

রামানুজন অন্যকে বোঝাবেন কী করে, অনেক সময় তিনি নিজেই বুঝেন না কীভাবে সেটা করেছেন। প্রায়ই ঘুম থেকে উঠে একটা কাগজে লিখে রেখেছেন, ঘুমের মাঝে তাকে নাকি নামগিরি দেবী এসে বলে গেছেন।

হার্ডি অনেক চিন্তা করলেন রামানুজনকে নিয়ে। তাকে আধুনিক অংক শাস্ত্র শেখাতেই হবে, কারণ অনেক সাধারণ জিনিস তিনি জানেন না। ফলস্বরূপ প্রাইম সংখ্যার ওপর তার অনেক কাজে ভুল বেরিয়েছে। কিন্তু আধুনিক অংকশাস্ত্র শেখাতে গিয়ে যদি তার রহস্যময় ক্ষমতার কোনো ক্ষতি হয় ? হার্ডি সেই ঝুঁকি নিয়েই সাবধানে রামানুজনকে আধুনিক অংক শাস্ত্র শেখাতে শুরু করলেন। হার্ডির নিজের ভাষায়, তাকে আর শিখিয়েছি কতটুকু, আমিই শিখেছি তার কাছ থেকে।

হার্ডির চেষ্টার ফল পাওয়া গেল সাথে সাথে, রামানুজন তার নতুন জ্ঞানের সাথে নিজস্ব রহস্যময় প্রতিভা একত্র করে চমকপ্রদ কাজ শুরু করলেন। পৃথিবীর গণিতবিদরা বিস্মিত হয়ে এই আশ্চর্য মানুষটিকে লক্ষ করতে থাকে।

১৯১৭ সালের বসন্তকালে রামানুজন হঠাৎ অসুস্থ হয়ে পড়লেন। এরপরে কখনো তিনি আর পুরোপুরি সুস্থ হন নি। তার বেশির ভাগ সময় কেটেছে বিভিন্ন স্যানিটরিয়ামে। মাঝে মাঝে বের হয়ে এসেছেন তখন ভীষণ উৎসাহ নিয়ে তার অংকে আবার ডুবে গেছেন। তার জীবনের কতগুলি শ্রেষ্ঠ কাজ এই সময়ে করা হয়েছে। পৃথিবীর সব গণিতবিদরা তখন এই রুগ্ন মানুষটিকে পৃথিবীর অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ হিসেবে মেনে নিয়েছেন, তাকে বলা হয় গণিতবিদদের গণিতবিদ। রামানুজন নিজে কখনো সম্মান বা স্বীকৃতির জন্যে ব্যস্ত ছিলেন না কিন্তু পৃথিবীর গুণীজন তাকে স্বীকৃতি দেয়ার সম্মানটুকু হারাতে চাইলেন না। অনেক জাঁকজমকের সাথে তাকে রয়াল সোসাইটির মেম্বার এবং ট্রিনিটি কলেজের ফেলো করা হলো।

১৯১৯ সালে দেশে ফিরে এসে এক বছরের মাঝে যক্ষ্মায় গণিতের এই মহারথী মাত্র তেত্রিশ বছর বয়সে মারা যান।

রামানুজনের শেষ জীবনের একটি ছোট ঘটনা দিয়ে তার কথা শেষ করা যাক। রামানুজন অসুস্থ হার্ডি তাকে দেখতে এসেছেন। রামানুজন সংখ্যা নিয়ে খেলা করতে ভালোবাসেন, হার্ডি তাই কথা প্রসঙ্গে বললেন, আমি যে ট্যাক্সিতে এসেছি সেটার নাম্বার ১৭২৯, কী সাধারণ একটা সংখ্যা! রামানুজন সাথে সাথে প্রতিবাদ করে বললেন, কে বলেছে এটা সাধারণ একটা সংখ্যা ? এটি হচ্ছে সেই ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যেটি দুইভাবে দুটি সংখ্যার কিউবের সমষ্টি হিসেবে লেখা যায়।

যদিও এটি চমৎকার একটি গল্প কিন্তু এটি রামানুজনের প্রতিভার উপযুক্ত গল্প নয়। রামানুজনের সংখ্যা নিয়ে হিসেব করার যে অসাধারণ ক্ষমতা ছিল এটি তার প্রমাণ কিন্তু কেউ যেন মনে না করেন সেটাই তার প্রতিভা। তার সত্যিকার গাণিতিক প্রতিভা অনুভব করতে পারেন শুধুমাত্র গণিতবিদেরা— তাই তিনি সর্বকালের শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ হয়েও সাধারণ মানুষের কাছে এখনো এত অচেনা!

সংখ্যাতত্ত্ব

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

সংখ্যাতত্ত্ব (Number Theory) হলো বিশুদ্ধ গণিতের সবচেয়ে পুরনো এবং বৃহৎ শাখা। এই তত্ত্বের উপজীব্য হলো পূর্ণসংখ্যা এবং তাদের গুণাবলি। আমাদের উপমহাদেশের সঙ্গে সংখ্যা ও সংখ্যাতত্ত্বের গর্ব করার মতো সম্পর্ক রয়েছে। শূন্য সংখ্যাটি যেমন আমরা আবিষ্কার করেছিলাম তেমনি সংখ্যাতত্ত্বের সবচেয়ে বড় জাদুকর শ্রীনিবাস রামানুজনের জন্মও এই উপমহাদেশে।

প্রাথমিক সংখ্যাতত্ত্ব (Elementary Number Theory) পূর্ণসংখ্যার বিভাজ্যতা— যেমন ভাগ করার পদ্ধতি এবং গ.সা.গু. নির্ণয়ের ইউক্লিডিয় অ্যালগরিদম, মৌলিক (Prime) সংখ্যার সরল গুণাবলি— যেমন যে-কোনো সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ, অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার অস্তিত্ব, ভাগশেষ সংক্রান্ত ফার্মা এবং অয়লারের উপপাদ্যসমূহ নিয়ে আলোচনা করে। আমরা কিছু প্রাথমিক ধারণা ও ফলাফল নিয়ে আলোচনা করব।

একটি ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যা P কে মৌলিক বলা হয় যদি সংখ্যাটি 1 এবং P ছাড়া অন্যকোনো পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য না হয়। যেমন 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ইত্যাদি।

মূল উপপাদ্য : প্রত্যেক ধ্বনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে একটি এবং কেবলমাত্র একটি পদ্ধতিতেই মৌলিক সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যেতে পারে। যেমন, $84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$

* যে-কোনো বিজোড় সংখ্যার বর্গকে 8q + 1 ফর্মে লেখা যায়, যেখানে q একটি পূর্ণ সংখ্যা। যেমন $11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2.10 + 1 = 10\,(10+2) + 1 = 2.5.2.6 + 1 = 8.15 + 1$ যেখানে q = 15

যে-কোনো তিনটি ক্রমিক সংখ্যার একটি 3 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন 7, 8, 9 এ 9 অথবা 230, 231, 232 এ 231।

* যে-কোনো তিনটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল 3! দ্বারা বিভাজ্য।

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ যদি } n=0 \\ (n-1)!\,n & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

n! কে ফ্যাক্টরিয়াল n বলা হয়। একইভাবে,

* যে-কোনো nটি ক্রমিকসংখ্যার গুণফল n! দ্বারা বিভাজ্য।

* যদি $a = bq + r$ হয় তবে a ও b-এর সাধারণ ভাজক b এবং r এরও সাধারণ ভাজক হইবে।

গ.সা.গু নির্ণয়ের ইউক্লিডের অ্যালগরিদম এই তত্ত্বটিই বারবার ব্যবহার করে।

* যদি কোনো সংখ্যা n $\sqrt{n}$ অথবা তার ছোট কোনো মৌলিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য না হয় তাহলে n মৌলিক। যেমন, 503 মৌলিক কিনা এর জন্য $\sqrt{503}$ এর বড় নয় (22) এ রকম মৌলিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হবে। এই মৌলিক সংখ্যাগুলো হলো 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19। যেহেতু 503 এই সংখ্যাগুলো দিয়ে ভাগ করলে মিলে না সুতরাং 503 একটি মৌলিক সংখ্যা। ইউক্লিড প্রমাণ করেছেন যে—

* মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা অসীম।

মনে করি, এদের সংখ্যা সসীম এবং মানের ক্রমবৃদ্ধি অনুসারে এই সংখ্যাগুলো $P_1 P_2, \ldots, P_k$। এবার সংখ্যা $n= P_1 \cdot P_2 \ldots P_k + 1$ কল্পনা কর। n যদি মৌলিক হয় তাহলে সসীমতার অনুমান ঠিক হলো না। আবার যদি n যৌগিক হয় তাহলে যেহেতু n $P_1, P_2, \ldots P_k$ দ্বারা বিভাজ্য নয় সেহেতু P_k-এর থেকেও বড় আরেকটি মৌলিক সংখ্যা আছে যা n-কে ভাগ করে।

* মনে করি N যতখুশি বড় একটি সংখ্যা। তাহলে এমন N অথবা বড় একটি পূর্ণসংখ্যার ব্লক আছে যার প্রত্যেকটি যৌগিক সংখ্যা।

মনে করি P_n হলো n-তম মৌলিক সংখ্যা। তাহলে নিম্নের $P_n–1$ টি ক্রমিক সংখ্যা—

$2.3.5 \ldots P_n + 2, 2.3.5 \ldots P_n + 3, \ldots, 2.3.5 \ldots P_n + P_n$ যৌগিক যেহেতু প্রথমটি 2, দ্বিতীয়টি 3 ও শেষটি P_n দ্বারা বিভাজ্য। এবার P_n-কে N-এর থেকে বড় নিলেই হলো।

* মনে করি $f(n)= a^n – 1, n>1$. তাহলে f(n) মৌলিক কেবলমাত্র যদি a = 2 এবং n মৌলিক হয়।

যে সকল মৌলিক সংখ্যা $2^n–1$ হিসেবে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে ফরাসি গণিতবিদ মার্সেনের (Mersenne ১৫৮৮–১৬৪৫) নামে নামকরণ করা হয়েছে। অত্যন্ত দ্রুতগতিসম্পন্ন কম্পিউটার ব্যবহার করে প্রমাণ করা হয়েছে যে n = 19937 হলে $2^{19937}–1$ একটি মার্সেন প্রাইম এবং এতে 6000 এরও অধিক দশমিক অঙ্ক রয়েছে। ১৯৮৪ সালে ড্যাভিড স্লোইনস্কি লিখিত প্রোগ্রাম CRAY X–MP সুপার কম্পিউটারে ব্যবহার করে তৎকালীন সর্ববৃহৎ মার্সেন প্রাইম

$2^{216091} – 1$ আবিষ্কার করা হয়। উল্লেখ করা যেতে পারে যে এই সংখ্যায় 65,050টি দশমিক অঙ্ক রয়েছে।

প্রাইম নাম্বারের ফাংশন নিয়ে যত অনুমান (conjecture) রয়েছে তার মধ্যে সবচেয়ে প্রসিদ্ধ হলো সপ্তদশ শতাব্দীর ফরাসি গণিতবিদ ফার্মার। ফার্মা কিন্তু পৃথিবীর শ্রেষ্ঠতম গণিতবিদদের একজন। তার বেশিরভাগ আবিষ্কারই সমসাময়িক গণিতবিদদের কাছে লেখা চিঠিতে লিপিবদ্ধ ছিল। ফার্মা অনুমান করেছিলেন

* যে কোনো পূর্ণ সংখ্যার জন্য $2^{2^n} + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা।

এই সংখ্যাগুলোকে ফার্মার সংখ্যা বলা হয়।

যেমন $F_5= 2^{2^5} + 1 = 42949672297$ একটি ফার্মা সংখ্যা।

কিন্তু অয়লার ১৭৩২ সালে দেখান যে $42949672297 = 641 \cdot 6700417$ ফার্মার নাম্বারের অনেক গুণাবলি রয়েছে যার একটি হলো—

* প্রথম nটি ফার্মার নাম্বারের গুণফল হলো $2^{2^n} - 1$

প্রমাণ : মনে করি প্রথম k টি ফার্মার নাম্বারের গুণফল $2^{2^k} - 1$ তা হলে $F_0 \cdot F_1 \ldots F_{k-1} \cdot F_k = \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right) = 2^{2^{k+1}} - 1$ অর্থাৎ আমরা k + 1 টি ফার্মার নাম্বারের জন্য সত্য প্রমাণ করলাম। তাহলে উপপাদ্যটি ইনডাকশন (induction)-এ প্রমাণিত হলো।

F_5 আবিষ্কার করার সঙ্গে সঙ্গেই ফার্মার নাম্বারের গুরুত্ব কমে যেত কিন্তু তা হয় নি কারণ 18 বছর বয়সী গাউস যখন গণিত ও দর্শনের কোনটি বেছে নিবেন ভাবছিলেন তখন তিনি স্কেল ও কম্পাস দিয়ে সুষম বহুভুজ আঁকার দীর্ঘদিনের সমস্যা সমাধান করেন এবং ফার্মার নাম্বারের সঙ্গে এর যোগসূত্র তৈরি করেন।

* যে কোনো বিজোড় n-এর জন্য স্কেল ও কম্পাস ব্যবহার করে সুষম n ভুজ তৈরি করা যাবে কেবল ও কেবলমাত্র n যদি ফার্মা প্রাইম কিংবা বিভিন্ন ফার্মা নাম্বারের গুণফলের সমান হয়।

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে $F_6 = 274177 \times 67280421310721$ F_7 যৌগিক কিন্তু উৎপাদক জানা নেই এবং F_8-এর একটি উৎপাদক হলো 59649589127497217। অনুরূপভাবে F_9 $39 \times 2^{16} + 1$ দ্বারা বিভাজ্য এবং F_{11} $39 \times 12^{13} + 1$ এবং $119 \times 2^{13} + 1$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\pi(n)$ হলো মৌলিক সংখ্যার সংখ্যা যার কোনোটিই n-এর বেশি নয়। লিজেন্ডার ও গাউসের এ বিষয়ে অনুমান প্রাইম নাম্বার উপপাদ্য নামে পরিচিত।

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\left(\frac{n}{\ln n}\right)} = 1$$

রাশিয়ান গণিতবেত্তা চেবিশেভ এবং ফরাসি গণিতবেত্তা রিম্যান এই উপপাদ্যের প্রমাণে যথেষ্ট অবদান রেখেছিলেন। পরিশেষে ফরাসি গণিতবিদ হ্যাডামার্ড এবং বেলজীয় গণিতবিদ ডেলা ভালে পুশিন ১৮৯৬ সালে প্রায় একই সময়ে এই উপপাদ্যের প্রমাণ করেন। ইংরেজ গণিতবেত্তা গোল্ডবাক ১৭৪২ সালে অয়লারকে লেখা একটি চিঠিতে নিম্নের কনজেকচারটি পেশ করেন যা গোল্ডবাক কনজেকচার নামে পরিচিত।

* 4-এর অধিক যে কোনো জোড় সংখ্যাকে দুটি বিজোড় প্রাইমের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। যেমন : 14 = 3+11, 38 = 7+31, 76 = 17+59, 106 = 59+47 এই কনজেকচারটির যথার্থতা 10^6 পর্যন্ত জোড় সংখ্যার জন্য পরীক্ষা করা হয়েছে যদিও এখনও এই সহজভাবে বিবৃত সূত্রের প্রমাণ পাওয়া যায় নি।

* যে-কোনো সংখ্যা x-এর জন্য $\lfloor x \rfloor$ (x-এর ফ্লোর) হলো সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা যা x থেকে বড় নয়। একইভাবে $\lceil x \rceil$ (x-এর সিলিং) হলো সবচেয়ে ছোট পূর্ণসংখ্যা যা x-এর ছোট নয়। যেমন, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lceil e \rceil = 3$ $\lfloor 4 \rfloor = \lceil 4 \rceil = 4$

n! n বৃদ্ধির সঙ্গে অত্যন্ত দ্রুতগতিতে বৃদ্ধি পায়। যেমন, 7! = 5040, 8! = 40320, 9! = 362880, 10! = 3628800. স্টার্লিং n! কে নিম্নোক্ত ফর্মুলা দিয়ে প্রকাশ করেছেন।

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ যেখানে ~ অর্থ হলো প্রায় সমান।

যে-কোনো একটি মৌলিক সংখ্যা P n!-এর মধ্যে কতবার উৎপাদক হিসেবে আছে তা নিম্নোক্ত পদ্ধতি অনুসরণ করে বের করা যেতে পারে। P = 2 এর n = 10 নিয়ে নিচের উদাহরণ তৈরি করা হয়েছে।

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2-এর ঘাত
2 দ্বারা বিভাজ্য		×		×		×		×		×	$5 = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor$
4 দ্বারা বিভাজ্য				×				×			$2 = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor$
8 দ্বারা বিভাজ্য								×			$1 = \left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor$
2-এর ঘাত	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	8

* $\in_p(n!)$ হলো p-এর সর্বোচ্চ ঘাত যা দিয়ে n! বিভাজ্য হবে।

* $$\in_p(n!) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

উল্লেখ করা যেতে পারে যে Σ (সিগমা) চিহ্নটি যোগফল প্রকাশের জন্য ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

$$\in_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$$

উপরের সারিতে বড়জোর $\lfloor \log_2 n \rfloor$টি ধ্বনাত্মক সংখ্যা রয়েছে। এর সঙ্গে যদি আরো ব্যবহার করি যে $\left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor n/2 \right\rfloor /2 \right\rfloor$ তাহলে $\in_2(100!) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{50}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{25}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 97$

এটা তো হলো মৌলিক সংখ্যা উৎপাদক হিসেবে n!-এর মধ্যে কতবার রয়েছে। এবার যদি প্রশ্নটি হয় যে-কোনো সংখ্যা m n!-এর মধ্যে উৎপাদক হিসেবে কতবার আছে তা কী করে বের করা যাবে ? তাহলে m-এর উৎপাদকগুলো বের করতে হবে এবং n!-এ ঐ উৎপাদকসমূহের সর্বোচ্চ ঘাতও। এর থেকে সহজেই উত্তরে পৌছানো যাবে। যেমন, 100! এ 10 এর সর্বোচ্চ ঘাত কত অথবা 100!-এর সর্বডানে কতগুলো শূন্য আছে। আমরা দেখি, 10 = 2×5

$\in_2 (100!) = 97, \in_5 (100!) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$

$\therefore$ 100! এর সর্বডানে 24টি শূন্য আছে।

* মনে করি $n = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} . .... p_k^{a_k}$ যেখানে $p_i, i = 1, ... , k$ মৌলিক সংখ্যা। তাহলে n-এর ভাজকের সংখ্যা হবে

$(a_1 + 1) (a_2 + 1)... (a_k + 1)$ যেমন, $n = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

$\therefore$ ভাজকের সংখ্যা হলো $(3 + 1) (2 + 1) (1 + 1) = 24$

* একটি পূর্ণসংখ্যা n-কে পারফেক্ট নাম্বার বলা হয় যদি তার সব ভাজকের (<n) যোগফল n হয়। যেমন, $n = 496 = 2^4 \times 31$

ভাজকগুলোর যোগফল = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496 সুতরাং, 496 একটি পারফেক্ট নাম্বার।

ইউক্লিড প্রমাণ করেন

* যদি $2^k - 1$ মৌলিক হয় তাহলে $2^{k-1} \left(2^k - 1\right)$ পারফেক্ট নাম্বার।

মনে করি, $P_k = 2^{k-1} \left(2^k - 1\right)$ তাইলে $P_7 = 8128$, $P_{13} = 33550336$

$P_{17} = 8589869056$ এবং $P_{19} = 137438691328$

অয়লার প্রমাণ করেন—

* প্রত্যেক জোড় পারফেক্ট নাম্বারকে $2^{k-1} (2^k - 1)$ রূপে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $2^k - 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা।

* যে-কোনো জোড় পারফেক্ট নাম্বারকে 10 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় ৬ না হয় 8 হইবে।

* ax + by = c কে দুই ভ্যারিয়েবলের ডাইওফ্যানটাইন সমীকরণ বলা হয় যদি এর সমাধানে x ও y-এর মান পূর্ণসংখ্যা হয়।

তৃতীয় শতাব্দীর বিখ্যাত গণিতবিদ ডাইওফ্যানটাইনের নামানুসারে সমীকরণের নামকরণ করা হয়। প্রসঙ্গত: উল্লেখ করা যেতে পারে তাঁর জীবনের বিভিন্ন মাইলস্টোন অর্জনের সময়কাল ডাইওফ্যানটাইন সমীকরণে প্রকাশ করে স্মৃতিফলকে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে।

* মনে করি a ও b-এর গ.সা.গু d। তাহলে ax + by = c-এর পূর্ণসংখ্যায় সমাধান থাকবে কেবল এবং কেবলমাত্র যদি d c-এর বিভাজক হয়। যেমন, 112x + 70y = 168

112 ও 70-এর গ.সা.গু 14 যা 168 কে নিঃশেষে ভাগ করে। সুতরাং এই সমীকরণের পূর্ণসংখ্যায় সমাধান থাকবে। 14 দিয়ে ভাগ করে সমীকরণকে সহজ করে নেয়া যায়। 8x + 5y = 12

মনে করি ঘড়িতে সময় x ঘণ্টা y মিনিট। এবার কাটা দু'টি পরস্পরের স্থান পরিবর্তন করার পরও সময় সঠিক হলে পরের সময়টা হবে $\left\lfloor \frac{y}{5} \right\rfloor$ ঘণ্টা $5x + \frac{y}{12}$ মিনিট।

উভয় সময়ের শুদ্ধতা থেকে আমরা পাই $60\left(\frac{y}{5} - \left\lfloor \frac{y}{5} \right\rfloor\right) = 5x + \frac{y}{12}$

এবার $\left\lfloor \frac{y}{5} \right\rfloor$ কে m ধরলে আমরা পাই 144y − 720m = 60x + y

বা 143y = 60x + 720 m

এবার x, m = 0, 1, ..., 11 ধরে আমরা বিভিন্ন সমাধান পেতে পারি।

উদাহরণ : 12x + 7y = 122-এর সমাধানগুলো বের কর।

যেহেতু 12 ও 7-এর গ.সা.গু. 1 ডাইওফ্যানটাইন সমীকরণের সমাধান আছে। x ও y-এর সহগের মধ্যে y-এর সহগ ছোট। 7 দিয়ে ওপরের সমীকরণকে ভাগ করে আমরা পাই $y = \frac{122 - 12x}{7}$

122 ও − 12 কে 7 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 3 ও 2।

সুতরাং $y = \frac{119 + 3 - 14x + 2x}{7} = 17 - 2x + \frac{3 + 2x}{7}$

যেহেতু y এবং 17 − 2x উভয়ই পূর্ণসংখ্যা $\frac{3 + 2x}{7}$ ও পূর্ণসংখ্যা হইবে।

এবার $u = \frac{3 + 2x}{7}$ ধরে আমরা পাই 7u − 2x = 3 আমরা এবার এই সমীকরণকে আবার একইভাবে লিখলে পার

$$x = \frac{-3 + 7u}{2} = \frac{-4 + 1 + 6u + u}{2} = -2 + 3u + \frac{1 + u}{2}$$

এবার $v = \frac{1 + u}{2}$ ধরে পাই 2v − u = 1. এই সমীকরণের একটি সমাধান হলো u = − 1, v = o

তাহলে $x = \frac{-3 + (-7)}{2} = -5$ এবং $y = \frac{122 - 12(-5)}{7} = 26$

এবং সাধারণ সমাধান হলো x = − 5 + 7t, y = 26 − 12t

* $4k + 1$ রূপের যে-কোনো মৌলিক সংখ্যাকে দু'টি বর্গের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $313 = 12^2 + 13^2$, $205 = 5\times41 = 3^2 + 14^2 = 6^2 + 13^2$

* $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

যেমন, $(3^2+5^2)(7^2+9^2) = (3\times7+5\times9)^2+(3\times9-5\times7)^2 = 66^2 + 8^2$

আবার $(3^2+5^2)(7^2+9^2) =(3\times7 - 5\times9)^2+(3\times9 +5\times7)^2 = 24^2+62^2$

* N যদি $8q + 7$ রূপের হয় তাহলে N-কে তিনটি বর্গের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা যাবে না।

অয়লারের নিম্নলিখিত উপপাদ্য অনুসারে যে কোনো পূর্ণসংখ্যাকে 4টি বর্গের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা সম্ভব।

* $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$

যেখানে, $u_1 = x_1 y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$

$u_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$

$u_3 = x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4$

$u_4 = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

যেমন, $6\times47 = 12^2 + 8^2 + 7^2 + 5^2$

যদিও পিথাগোরিয়ান সমীকরণ $x^2 + y^2 = z^2$-এর পূর্ণসংখ্যায় সমাধান সেই প্রাচীনকালেই জানা ছিল $x^3 + y^3 = z^3$, $x^4 + y^4 = z^4$ কিংবা $x^n + y^n = z^n$, $n>2$-এর সমাধান পাওয়া যাচ্ছিল না। ১৬৩৭ সালে ফার্মা একটি কনজেকচারের মাধ্যমে এ সকল প্রশ্নের উত্তর দিয়েছেন।

ফার্মার শেষ উপপাদ্য : $x^n + y^n = z^n$, $n>2$-এর কোনো পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নেই। এই সমস্যাটি গণিতবিদদের সুদীর্ঘ ২৫০ বছর ভাবিয়ে রেখেছিল। ১৯৯৫ সালে এর সমাধান দেন প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতবিদ অ্যান্ড্রু ওয়াইলস যা ১৯৯৫ সালের মে মাসে অ্যানালস অব ম্যাথমেটিক্সে প্রকাশিত হয়েছে।

লিউনার্দ অয়লার

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

অয়লার ছিলেন বিশ্বের শ্রেষ্ঠতম গণিতবেত্তাদের একজন। ১৭০৭ সালের ১৫ এপ্রিল তিনি সুইজারল্যান্ডের ব্যাসেলে জন্মগ্রহণ করেন। তাঁর পিতা পল অয়লার ব্যাসেল বিশ্ববিদ্যালয়ে ধর্মতত্ত্ব নিয়ে লেখাপড়া করেন। লিউনার্দের বয়স যখন এক তখন তাঁদের পরিবার রাইহেনে বসবাস শুরু করেন। লিউনার্দের পিতা বেরনুলির কাছ থেকে কিছু গণিতও শিখেছিলেন এবং তা দিয়েই লিউনার্দের প্রাথমিক গণিতের হাতেখড়ি হয়। লিউনার্দ ব্যাসেলে যে স্কুলে যেতেন তার অবস্থা ভালো ছিল না ফলে কিশোর লিউনার্দর অঙ্ক শেখাটা তাঁর পিতার কাছেই হয়। তাঁর পিতা অবশ্যি চাচ্ছিলেন লিউনার্দ যাতে ধর্মযাজকই হন এবং তাঁকে ব্যাসেল বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি করেন। লিউনার্দ মাত্র ১৪ বছর বয়সে বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হন।

লিউনার্দ অয়লার

অয়লার তাঁর আত্মজীবনীতে লিখেছেন যে বেরনুলির সঙ্গে তাঁর সাক্ষাতের অপূর্ব সুযোগ ঘটলেও ব্যস্ত এই গণিতজ্ঞ অয়লারকে পড়ানোর মতো সময় দিতে রাজি হন নি। তিনি ক্রমশ গণিতের জটিল বই পড়ার জন্য অয়লারকে পরামর্শ দিলেন এবং প্রতি রবিবার বিকালে সমস্যা নিয়ে দেখা করতে বললেন। নিউটন ও ডেকার্তের দার্শনিক ধারণাসমূহের তুলনামূলক বিশ্লেষণ করে অয়লার ১৭২৩ সালে দর্শনে মাস্টার্স ডিগ্রি অর্জন করেন। যদিও পিতার ইচ্ছানুযায়ী ১৭২৩ সালে তিনি ধর্মতত্ত্ব লেখাপড়া শুরু করেন কিন্তু গণিতের মতো আনন্দ তিনি এখানে পান নি। যাহোক পরিশেষে পিতাকে রাজি করিয়ে অয়লার গণিতশাস্ত্র অধ্যয়ন শুরু করেন। বেরনুলির সাহায্যে অয়লার ১৭২৬ সালে বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষা শেষ করেন। ঐ বছর তাঁর একটি গবেষণা প্রবন্ধও বের হয়। জাহাজের পালের সবচেয়ে ভালো সন্নিবেশ কীভাবে করা যায় এর ওপর একটি গবেষণা প্রবন্ধ লিখে অয়লার ১৭২৭ সালে গ্র্যান্ড প্রাইজের জন্য প্যারিস একাডেমিতে জমা দেন।

১৭২৭ সালের পুরস্কার যদিও বুগুয়ের (Bouguer) পায় অয়লারের প্রবন্ধটি দ্বিতীয়স্থান দখল করে। ১৭২৬ সালের জুলাই মাসে নিকোলাস (2) বেরনুলির যখন মৃত্যু হয় তখন অয়লার সেন্ট পিটার্সবার্গে শরীরতত্ত্বে গণিত ও মেকানিকসের প্রয়োগ শেখানোর একটি চাকুরি পান। ঐ একই সময়ে শব্দতত্ত্বের ওপর একটি প্রবন্ধ লিখে যথেষ্ট সুনাম অর্জন করার ফলে ব্যাসেল বিশ্ববিদ্যালয়ে অধ্যাপকের পদে চাকুরি পাওয়ার সম্ভাবনা থাকলেও তাঁর ১৯ বছর বয়স বাধা হয়ে দাঁড়ায়। এমতাবস্থায় ১৭২৭ সালের ৫ এপ্রিল ব্যাসেল ত্যাগ করে নৌকা ও ডাকঘরের ওয়াগনে করে ১৭ মে তারিখ সেন্ট পিটার্সবার্গ পৌছান। দু'বছর পর তিনি সদ্য তৈরি সেন্ট পিটার্সবার্গ সায়েন্স একাডেমিতে যোগদান করেন। অয়লারের কাজের জন্য জায়গাটি সর্বোত্তম ছিল যেহেতু অত্যন্ত নামিদামি গণিতজ্ঞরা এই জায়গায় কাজ করতেন। ১৯৩০ সালে অয়লার এই একাডেমিতে পদার্থবিজ্ঞানের অধ্যাপক নিযুক্ত হন, এই সঙ্গে তিনি একাডেমির পূর্ণাঙ্গ সদস্যপদও লাভ করেন। ১৭৩৩ সালে ড্যানিয়েল বেরনুলি যখন একাডেমি ছেড়ে চলে যান তখন অয়লার গণিতের সিনিয়র চেয়ার হিসেবে নিযুক্তি পান। এই ধারাবাহিকতায় যে অর্থনৈতিক উন্নতি হলো তার ফলে অয়লার ১৭৩৪ সালের ৭ জানুয়ারি সেন্ট পিটার্সবার্গ জিমন্যাসিয়ামের পেইন্টারের মেয়ে ক্যাথেরিনা স্পেলকে বিয়ে করতে পারলেন। তাদের সর্বমোট ১৩টি সন্তান ছিল যার মাত্র ৫ জন শৈশব অতিক্রম করতে পেরেছিল। অয়লার বলেছিলেন গণিতের অনেক বড় বড় আবিষ্কার তিনি করেছিলেন তার সন্তানদের হয় বাহুতে রেখে না হয় তাঁর পায়ের আশপাশে ক্রীড়ারত অবস্থায়।

১৭৩০ সালের পরে তিনি ম্যাপ অংকন, বিজ্ঞান শিক্ষা, চুম্বক, ফায়ার ইঞ্জিন, মেশিন এবং জাহাজ নির্মাণ নিয়ে গবেষণা করেন। তাঁর গবেষণার নিউক্লিয়াস হলো নাম্বার থিউরি, ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশান, ক্যালকুলাস অব ভ্যারিয়েশন এবং র‍্যাশনাল মেকানিক্স।

১৭৩৬-৩৭ সালে মেকানিকা নামক বই এবং অন্যান্য প্রবন্ধ প্রকাশের মধ্য দিয়ে অয়লার গণিতে বড় মাত্রার কাজ শুরু করলেন। ১৭৩৫ সালে জ্বরে প্রায় মারা যাওয়া থেকেই অয়লারের স্বাস্থ্যগত সমস্যা শুরু হয়। ১৭৩৮ সালে তার দৃষ্টিসমস্যা শুরু হয় এবং ম্যাপ তৈরির কাজে অতিরিক্ত চাপের ফলে ১৭৪০ সালের মধ্যে তাঁর একটি চোখের দৃষ্টিশক্তি নষ্ট হয়ে যায় এবং অন্যটিও হুমকির মুখে পড়ে। ১৭৪০ সালে অয়লারের অনেক সুনাম ১৭৩৮ ও ১৭৪০ সালে তিনি প্যারিস একাডেমির গ্র্যান্ড প্রাইজ পেয়েছেন। এই সুনামের ফলে বার্লিনে ফিরে আসার বিভিন্ন প্রস্তাব পাচ্ছিলেন। ঐ সময় সেন্ট পিটার্সবার্গে বিদেশীদের থাকা

অসুবিধা হচ্ছিল বিধায় অয়লার সেন্ট পিটার্সবার্গ পছন্দ করলেও বার্লিনে একাডেমি অব সায়েন্সেসে যোগদান করেন ফ্রেডারিক দি গ্রেটের আমন্ত্রণে। বার্লিন একাডেমিতে অয়লার গণিতের পরিচালক নিযুক্ত হন। এই একাডেমিতে অয়লার অবজারভেটরি, বোটানিক্যাল গার্ডেন দেখাশুনা করতেন, নিয়োগের দায়িত্বে ছিলেন, হিসেবের কাজ করতেন, ক্যালেন্ডার এবং ম্যাপ তৈরির কাজ করতেন যা থেকে একাডেমি অর্থোপার্জন করত। এছাড়াও তিনি লাইব্রেরি এবং প্রকাশনার কাজ দেখাশুনা করতেন। সরকারের লটারি, ইন্সুরেন্স এবং পেনশন সংক্রান্ত উপদেষ্টাও তিনি ছিলেন। বার্লিনে যে ২৫ বছর অয়লার ছিলেন তাতে ৩৮০টি বৈজ্ঞানিক প্রবন্ধ রচনা করেছিলেন। তিনি ক্যালকুলাস অব ভ্যারিয়েশনস, প্ল্যানেটের অরবিট ক্যালকুলেশন, সমরবিদ্যা, জাহাজ নির্মাণ, চাঁদের গতিবিধি, ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস এবং জনপ্রিয় বিজ্ঞান বই রচনা করেছিলেন। ১৭৫৯ সালে যখন একাডেমির প্রেসিডেন্ট মপেরটুই (Maupertuis) পরলোকগমন করেন তখন রাজার সঙ্গে সুসম্পর্ক না থাকার কারণে তিনি প্রেসিডেন্ট উপাধিটি পেলেন না, কিন্তু একাডেমি চালানোর দায়িত্ব পেলেন। দ্যলাম্বারের সঙ্গে যখন অয়লারের সুসম্পর্ক ছিল না। রাজা যখন দ্যলাম্বারকে প্রেসিডেন্ট হতে বললেন তখন অয়লার বার্লিন ছাড়ার সিদ্ধান্ত নিলেন।

১৭৬৬ সালে যখন অয়লার সেন্ট পিটার্সবার্গে চলে গেলেন তখন রাজা অত্যন্ত ক্রোধান্বিত হয়েছিলেন। কিন্তু রাশিয়া পৌছানোর পর পরই অয়লার একটি অসুস্থতার পর সম্পূর্ণ অন্ধ হয়ে যান। ১৭৭১ সালে আগুন লেগে যাওয়ার ফলে তার বাসা ভস্মীভূত হয়। তিনি শুধু নিজেকে এবং তার গণিতের পাণ্ডুলিপিগুলোকে বাঁচাতে পেরেছিলেন। একটি ক্যাটারাক্ট অপারেশনের ফলে কয়েকদিনের জন্য তিনি দৃষ্টিশক্তি ফিরে পেয়েছিলেন। তাঁর অসম্ভব স্মৃতিশক্তির বলেই অয়লার আলোবিদ্যা, অ্যালজেবরা এবং চাঁদের গতি নিয়ে অন্ধ হওয়ার পরও কাজ করতে পারছিলেন। সেন্ট পিটার্সবার্গে প্রত্যাবর্তনের পর অয়লারের বয়স যখন ৫৯ তখন থেকে সম্পূর্ণ অন্ধ হয়েও জীবনের অর্ধেক কাজ তিনি করেছিলেন। চিন্তা করা যায় অন্ধ হয়ে, বৃদ্ধ হয়েও জীবনের অর্ধেক গবেষণা প্রবন্ধ তিনি রচনা করেছিলেন। সমসাময়িককালে তাঁর মতো এত উৎপাদনশীলতা সম্পন্ন কোনো বৈজ্ঞানিক বিশ্বে ছিল না। আজ অবশ্য মুদ্রণ ব্যবস্থার এমন উন্নতি হওয়ার পরেও অয়লারের সমপরিমাণ প্রকাশনা আছে এরকম বিজ্ঞানীর সংখ্যা খুব কম হবে। এ সকল কাজ অবশ্য তিনি একা করতে পারেন নাই সাহায্যের প্রয়োজন হয়েছে। তাঁকে সাহায্য করেছেন তাঁর দু'ছেলে জোহান আলব্রেক্ট— যিনি ১৭৬৬ সালে একাডেমির পদার্থবিজ্ঞানের চেয়ার হিসেবে নিযুক্তি লাভ করেন এবং ক্রিস্টোফ অয়লার যিনি

সামরিক বাহিনীতে কর্মরত ছিলেন। অয়লারকে অবশ্যি একাডেমির আরো দু'জন সদস্য ক্রাফট ও লেক্সেল এবং তরুণ গণিতবিদ ফাস সাহায্য করেছিলেন। ফাস, যিনি অয়লারের দৌহিত্রির স্বামী ছিলেন, ১৭৭৬ সালে অয়লারের সহকারী নিযুক্ত হন। এই ব্যক্তিদের থেকে অয়লার তাঁর গবেষণা সংক্রান্ত সাহায্যও পেতেন। চাঁদের গতিবিধি সংক্রান্ত ৭৭৫ পৃষ্ঠার বইটি যা ১৭৭২ সালে প্রকাশিত হয়েছে তাঁতে অয়লার আলেব্রক্ট, ক্রাফট ও লেক্সেলের উল্লেখযোগ্য ভূমিকার কথা বলেছেন। ফাস ৭ বছরে অয়লারের ২৫০টি প্রবন্ধ তৈরি করে দিয়েছিলেন। ইউসকেভিচ অয়লারের মৃত্যুর দিনের নিম্নলিখিত বর্ণনা দেন।

১৭৮৩ সালের ১৮ই সেপ্টেম্বর অয়লার দিনের পূর্বাহ্ন সাধারণভাবেই অতিবাহিত করেন। তিনি তাঁর একজন নাতি/নাতনীকে অঙ্ক শিখিয়েছিলেন, তারপর বেলুনের গতি নিয়ে দুটি বোর্ডে চক দিয়ে হিসাব কষেছেন। তারপর লেক্সেল এবং ফাসের সঙ্গে সদ্যআবিষ্কৃত ইউরেনাস গ্রহ সম্পর্কে কথা বলেছেন। বিকেল ৫টায় তার মস্তিষ্কে রক্তক্ষরণ হয় এবং "আমি মারা যাচ্ছি" বলে তিনি অজ্ঞান হয়ে পড়েন। রাত ১১টায় তিনি মৃত্যু বরণ করেন।

১৭৮৩ সালে তার মৃত্যুর পর সেন্ট পিটার্সবার্গ একাডেমি ৫০ বছর ধরে তার অপ্রকাশিত কাজগুলো প্রকাশ করেছেন। তাঁকে সর্বকালের সফলতম গণিত লেখক হিসেবে স্বীকার করা হয়। তিনি জ্যামিতি, ক্যালকুলাস এবং সংখ্যাতত্ত্বের অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ কাজগুলো করেছেন। তিনি বেটা, গামা ফাংশন এবং ইনটিগ্রেটিং ফ্যাক্টর প্রবর্তন করেন। কন্টিনিউয়াস মেকানিকস, চাঁদসংক্রান্ত তত্ত্ব, থ্রিবডি প্রবলেম, ইলাস্টিসিটি, শব্দতত্ত্ব, আলোর ওয়েব থিউরি, হাইড্রলিক্স ও সংগীত নিয়ে গবেষণা করেন। থিউরি অব মোশন্স অব রিজিড বডি ১৭৬৫ সালে প্রকাশের মাধ্যমে তিনি অ্যানালাইটিক্যাল মেকানিকসের সূচনা করেন।

অয়লার ১৭৩৪ সালে $f(x)$ নোটেশন, ১৭২৭ সালে e, ১৭৭৭ সালে $\sqrt{-1}$ এর জন্য i, ১৭৫৫ সালে পাই এর জন্য π এবং যোগের Σ এবং ফাইনাইট ডিফারেন্সের জন্য ∇y, $\nabla^2 y$ নোটেশন প্রবর্তন করেন।

এবার অয়লারের কিছু কাজ সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যাক।

গোল্ডবাক ১৭২৯ সালে অয়লারকে জিজ্ঞেস করেন ফার্মার কনজেকচার যে 2^n+1 মৌলিক সংখ্যা যদি n 2-এর ঘাত হয়— এটা জানেন কিনা, অয়লার $n=1,2,4,8,6$-এর জন্য কনজেকচারের শুদ্ধতা পরীক্ষা করেন এবং ১৭৩২ সালে দেখান যে, $2^{32}+1 = 4294967297$ সংখ্যাটি 641 দ্বারা বিভাজ্য। ১৭৪৯ সালে অয়লার ফার্মার আরেকটি কনজেকচার প্রমাণ করেন যে a এবং b

সহমৌলিক হলে $a^2 + b^2$ $4n-1$ দিয়ে বিভাজ্য হবে না। ১৭৩৫ সালে ইনফাইনিট সিরিজ যোগের জন্য অয়লার ধ্রুবক γ প্রবর্তন করেন। অয়লার ফার্মার শেষ উপপাদ্যের একটি বিশেষ কেস প্রমাণ করেন যে $x^3 + y^3 = z^3$-এর সমাধান পূর্ণসংখ্যায় নেই। ক্যালকুলাস অব ভ্যারিয়েশনের যথাযথ চর্চাই হয় তাঁর ১৭৪০ সালের একটি প্রকাশনার পর। ডিফারেন্সিয়াল জ্যামিতিতে অয়লারের অবদান অনস্বীকার্য। ফ্লুইড মেকানিকসে অয়লারের কাজগুলো অত্যন্ত প্রসিদ্ধ। ১৭৩৯ সালে সঙ্গীতের ওপর লেখা তার গবেষণার ফল সংগীতকে গণিতের সঙ্গে সূত্রবদ্ধ করে যা সম্পর্কে নিম্নলিখিত বক্তব্য উল্লেখযোগ্য "সংগীতজ্ঞদের জন্য লেখাটি খুব বেশি গাণিতিক এবং গণিতবিদদের জন্য খুব বেশি সংগীতময়।"

অয়লার ১৭৩৫ সালে সেন্টপিটার্সবার্গ একাডেমির ভূগোল অংশের পরিচালক হয়ে গোটা রাশিয়ান সাম্রাজ্যের ম্যাপ তৈরি করেন। অয়লার গ্রাফ থিউরিতেও অবদান রাখেন। কনিগসবার্গ সেতু সমস্যাটি তিনি প্রথম গ্রাফ এঁকে সমাধান করেন।

অয়লারের মতো একজন প্রতিভাধরের জন্মের ফলেই মানবসভ্যতার বিভিন্ন দিক, জ্ঞানরাজ্যের বিভিন্ন শাখার এমন অগ্রগতি হয়েছে।

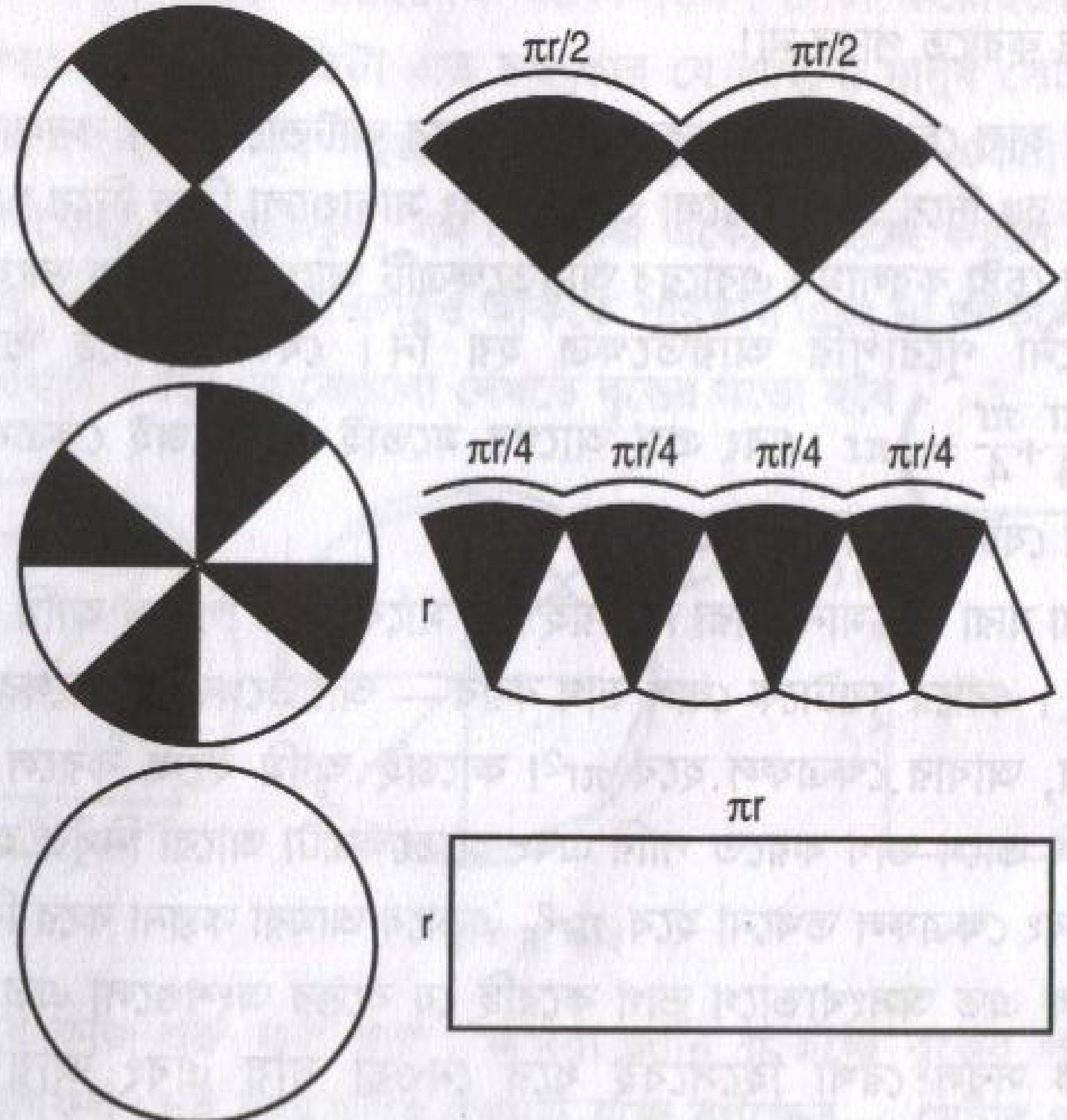
π কেমন করে পাই ?

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

সাবানের ফেনা দিয়ে যারা বুদবুদ তৈরি করেছে তারা যদি হঠাৎ একদিন দেখে একটা চতুষ্কোণ বুদবুদ বের হয়ে আসছে তারা নিশ্চয়ই ভূত দেখার মতো চমকে উঠবে। কারণ সাধারণত চতুষ্কোণ স্বাভাবিক বা প্রকৃতিক জিনিস নয়— কাউকে না কাউকে সেটা তৈরি করতে হয় সে তুলনায় গোল বেশ স্বাভাবিক জিনিস, আকাশের চাঁদ গোল, সূর্য গোল, বেশির ভাগ ফল গোল, সাবানের বুদবুদ এবং চোখের মণি গোল— এরকম অসংখ্য উদাহরণ দেওয়া যায়। প্রকৃতি প্রাকৃতিক নিয়মে গোল জিনিস তৈরি করে তাই গোল বা গোলাকার জিনিস দেখে আমরা জন্ম থেকে অভ্যস্ত।

গোলাকার জিনিস বলতে আমরা ত্রিমাত্রিক জিনিস বোঝাই যার দৈর্ঘ্য প্রস্থ এবং উচ্চতা আছে (যেমন ফুটবল), বৃত্ত হচ্ছে তার দ্বিমাত্রিক রূপ-যার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে কিন্তু উচ্চতা নেই তাই কাগজে আমরা বৃত্ত আঁকতে পারি, প্রয়োজন হয় শুধুমাত্র একটা কম্পাসের। বৃত্ত দেখে নি সেরকম কোনো মানুষ নেই এবং মোটামুটি নিশ্চিতভাবে বলা যায় সবাই লক্ষ করেছে সব বৃত্তই দেখতে এরকম। ছোট বড় মাঝারি যে বৃত্তই হোক না কেন তার মাঝে কোনো পার্থক্য নেই। কেউ বলতে পারবে না কোনো কোনো বৃত্ত অন্য বৃত্ত থেকে বেশি বৃত্তাকার! বৃত্তকে নিয়ে একটু ঘাঁটাঘাঁটি করলেই আরেকটা জিনিস বের হয়ে যাবে সেটা হচ্ছে বৃত্তের পরিধি (circumference) এবং ব্যাস (Diameter) এর অনুপাত (ratio) সমান। একটা ছোট বৃত্তের (চোখের মণি) পরিধিকে ব্যাস দিয়ে ভাগ দিলে যা পাব একটা বিশাল বৃত্তে (পৃথিবী) পরিধিকে ব্যাস দিয়ে ভাগ দিলে সেই একই সংখ্যা পাব। যদি একটা বৃত্তের পরিধিকে বলা হয় C এবং ব্যাসকে বলা হয় D তাহলে এই দু'য়ের অনুপাত C/D, এই পৃথিবী কিংবা বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের সকল বৃত্তের জন্য সমান। তোমাদের যদি কৌতূহল থাকে তাহলে নিজেরাই মেপে দেখতে পার— চোখের মণি বা পৃথিবী দিয়ে শুরু করো না, সাইকেলের চাকা একটি ভালো সাইজ। একটা সুতা দিয়ে চাকাটাকে ঘিরে নিয়ে তার দৈর্ঘ্য মেপে নাও সেটা হবে C, তারপর চাকার কেন্দ্রের ওপর দিয়ে সুতাটা একমাথা থেকে অন্যমাথা পর্যন্ত টেনে ধরো

সেটা হবে D, এবারে C কে D দিয়ে ভাগ কর। যদি মোটামুটি নিখুঁতভাবে করতে পার তাহলে দেখবে ভাগফল বা C এবং D এর অনুপাতটা হবে 3 এর কাছাকাছি। পরিধি এবং ব্যাসের এই অনুপাতটি একটি ধ্রুবক, অর্থাৎ সব বৃত্তের জন্যে এটি সত্যি এবং গণিতের জগতে এটাকে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যারা একটু উঁচু ক্লাশে উঠেছে তারা অনেকেই π কে ব্যবহার করে কাজ করতে শুরু করেছ তারা সম্ভবত: π এর মান হিসেবে $\frac{22}{7}$ বা 3·14 ব্যবহার করেছ কিন্তু সবাই নিশ্চয়ই জান যে এটা π এর প্রকৃত মান নয়। এর প্রকৃত মানটি এখনো বের করার চেষ্টা চলছে, ইন্টারনেটের সূত্র অনুযায়ী এখন পর্যন্ত দশমিকের পর প্রায় দু'শ পঞ্চাশ কোটি সংখ্যা পর্যন্ত বের করা হয়েছে। এই মুহূর্তে শত শত কম্পিউটার আরো নিখুঁতভাবে বের করার চেষ্টা চলছে যদিও সবাই জানে π হচ্ছে একটা ট্রান্সেনডেন্টাল (Transcendental) সংখ্যা, কোনো এলজেবরার সমীকরণের সমাধান হিসেবে এটা লেখা যাবে না এবং কখনোই এটাকে পূর্ণভাবে বের করা যাবে না। একেবারে আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সাথে সম্পর্ক রয়েছে এমন একটি ব্যাপার অথচ তার মাঝেই না কী বিচিত্র রহস্য লুকিয়ে আছে।



১ নম্বর ছবি

আমরা বলেছি পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত হচ্ছে π, অর্থাৎ $C/D=\pi$ অন্যভাবে বলা যায় পরিধি $C = \pi D$, তবে বৃত্ত নিয়ে কাজ করার সময় সাধারণত ব্যাস ব্যবহার না করে ব্যাসার্ধ ($r=D/2$) ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ পরিধি $C= 2\pi r$.

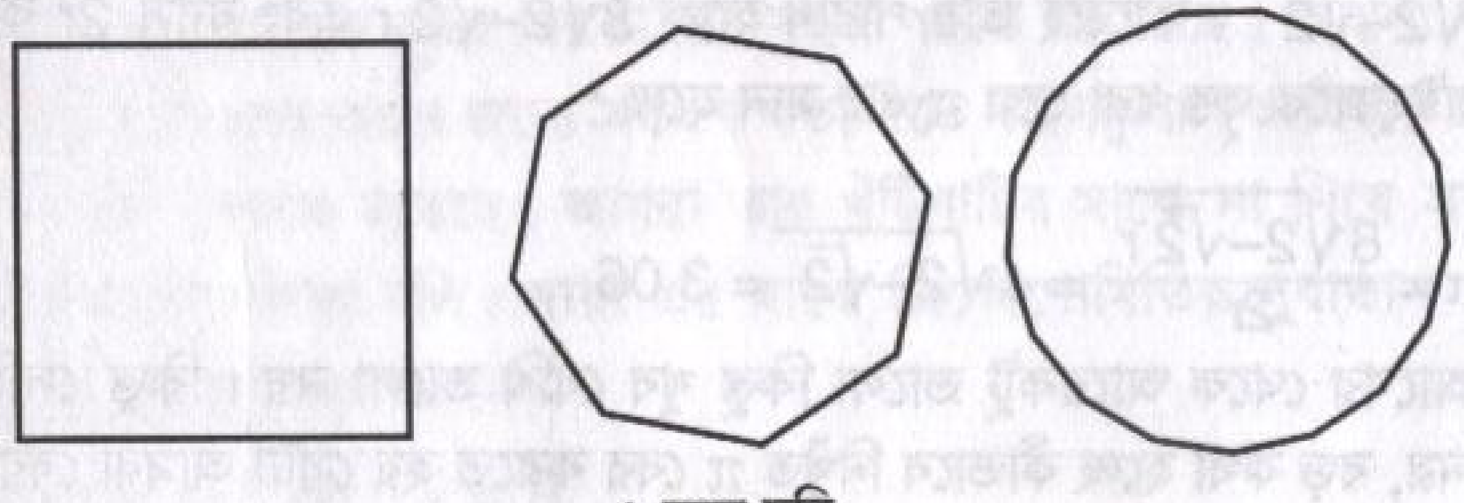
আমি নিশ্চিত সবাই কখনো না কখনো এই জিনিসটি দেখেছে। বৃত্তের পরিধি জানার পর সবাই যেটি জানতে চায় সেটি হচ্ছে বৃত্তের ক্ষেত্রফলটি কত। ইন্টেগ্রাল ক্যালকুলাস (Integral Calculus) জানলে খুব সহজেই সেটা বের করে ফেলা যায় কিন্তু বৃত্তের মাঝে এমন চমৎকার সৌন্দর্য লুকিয়ে আছে যে শুধু যুক্তিতর্ক ব্যবহার করেই বৃত্তের ক্ষেত্রফল বের করে ফেলা যায়। মনে করা যাক (১ নম্বর ছবির ওপরে) আমরা একটা বৃত্তকে চার টুকরো করেছি, দেখতে সহজ হওয়ার জন্যে সেটাকে সাদা এবং কালো রঙে ভাগ করেছি এবং কালো টুকরোগুলোকে ওপরে আর সাদা টুকরোগুলোকে নিচে রেখে ছবির মতো সাজিয়েছি। বৃত্তের টুকরোগুলো একটু অন্যরকম করে সাজানো অংশটুকু কোনো মতেই একটা আয়তক্ষেত্র নয় কিন্তু যদি খুব খুব কষ্ট করে এটাকে আয়তক্ষেত্র হিসেবে কল্পনা করি তাহলে তার দৈর্ঘ্য হবে $\left(\frac{\pi r}{2}+\frac{\pi r}{2}=\right)\pi r$ এবং প্রস্থ হবে r, কাজেই ক্ষেত্রফল $\pi r\times r = \pi r^2$ এটি ক্ষেত্রফল হবার জন্যে চমৎকার একটি রাশি— কিন্তু কাউকে সেটা বিশ্বাস করাতে পারব না!

আমরা হাল চেড়ে না দিয়ে বৃত্তটাকে এবারে আটভাগে ভাগ করলাম, আবার সাদা কালো রঙ দিয়ে, কালো গুলো ওপরে এবং সাদাগুলো নিচে দিয়ে আয়তক্ষেত্র তৈরি করার চেষ্টা করলাম। এবারের আয়তক্ষেত্রটি আগেরটি থেকে ভালো হয়েছে কিন্তু এখনো পুরোপুরি আয়তক্ষেত্র হয় নি। যেটা হয়েছে তার দৈর্ঘ্য $\left(\frac{\pi r}{4}+\frac{\pi r}{4}+\frac{\pi r}{4}+\frac{\pi r}{4}=\right)\pi r$ এবং প্রস্থ আগের মতোই r, কাজেই ক্ষেত্রফল πr^2– আগের বার যেটা পেয়েছি সেটাই।

তোমরা যারা বুদ্ধিমান তারা নিশ্চয়ই এর মাঝে বুঝে গিয়েছ আমি কী করার চেষ্টা করছি। এবারে বৃত্তটাকে ষোল ভাগ করব— আয়তক্ষেত্রটি আগের চাইতেও ভালো হবে, আবার ক্ষেত্রফল হবে πr^2! কাজেই আমি ইচ্ছে করলে বৃত্তটাকে আরো বেশি ভাগে ভাগ করতে পারি এবং আতক্ষেত্রটা আরো নিখুঁত হয়ে যেতে পারে— এবং ক্ষেত্রফল তখনো হবে πr^2- এভাবে আমরা কল্পনা করে নিতে পারি যে বৃত্তটাকে এত অসংখ্যভাগে ভাগ করেছি যে বৃত্তের অংশগুলো এত ছোট যে সেগুলোকে সরল রেখা হিসেবেই ধরে নেওয়া যায় এবং আয়তক্ষেত্রটি আসলেই প্রকৃত একটি আয়তক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল হচ্ছে ($\pi r\times r =$) πr^2!

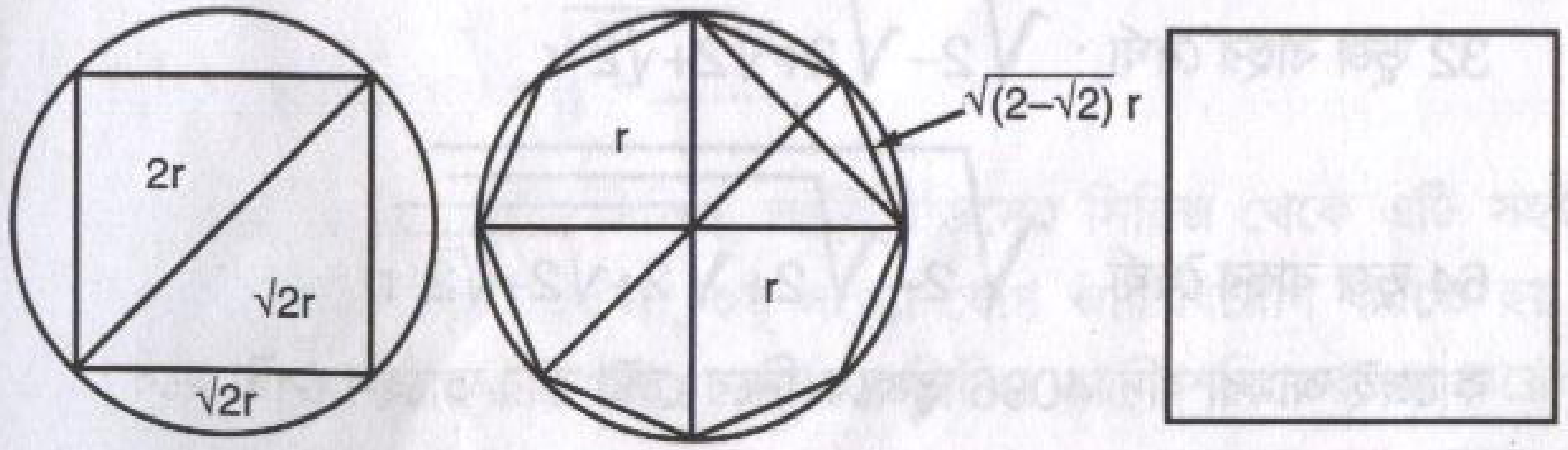
কাজেই দেখতেই পাচ্ছ π এর বৃত্তের পরিধি কিংবা বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সাথে খুব ঘনিষ্ঠ একটা সম্পর্ক রয়েছে। কিন্তু π-এর মান কত?

অবশ্যিই সবচে' সহজ উপায় হচ্ছে একটা বৃত্ত এঁকে তার পরিধি মেপে ব্যাস দিয়ে ভাগ করে নেয়া। সেটার কিছু সমস্যা আছে— কোনো কিছু খুব নিখুঁতভাবে মাপা এত সহজ নয়। তা ছাড়াও এর মাঝে একটা গায়ের জোর গায়ের জোর ভাব আছে— বুদ্ধির ভাবটা নেই। কাজেই না মেপে বুদ্ধি করে কি π-এর মান বের করা যায়?



২ নম্বর ছবি

সবার আগে সেটা করেছিলেন আর্কিমিডিস। সেটা করেছিলেন জ্যামিতি ব্যবহার করে— তার পদ্ধতিটা এত চমৎকার যে এখনো মানুষ সেটা মুগ্ধ হয়ে দেখে। সেটা বোঝাও খুব সহজ— ২ নম্বর ছবিতে আমরা একটা সমচতুর্ভুজ (অর্থাৎ বর্গক্ষেত্র) সম অষ্টভুজ, সম ষোলভুজ এঁকেছি। ইচ্ছে করলে আমরা সম বত্রিশ ভুজ, সম চৌষট্টিভুজ এসবও আঁকতে পারতাম এবং না আঁকলেও তোমরা নিশ্চয়ই বিশ্বাস করবে যে সেগুলো দেখতে বৃত্তের মতো হবে।



৩ নম্বর ছবি

এবারে কাজ শুরু করা যাক। আমরা জানি π হচ্ছে বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের ভাগফল। দুই নম্বর ছবির প্রথমটি হচ্ছে বর্গক্ষেত্র— সেটার পরিধি এবং ব্যাসের ভাগ ফল দিয়ে শুরু করা যাক। বর্গক্ষেত্রের জন্য ব্যাস হচ্ছে 2r এবং

পরিধি হচ্ছে $4\sqrt{2}r$ (৩ নম্বর ছবি) কাজেই তাদের ভাগফলকে যদি π বলি তাহলে সেটা হবে

$\pi = \frac{4\sqrt{2}r}{2r} = 2\sqrt{2} = 2x\ 1.4128 = 2.842715$ দেখাই যাচ্ছে আমরা π এর মান যেটা জানি সেটার তুলনায় এটা মোটেও নিখুঁত নয়।

এবারের অষ্টভুজ নিয়ে শুরু করা যাক। ৩ নম্বর ছবিটি নিয়ে পিথাগোরাসের সূত্র নিয়ে একটু ধাক্কাধাক্কি করলেই দেখবে অষ্টভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{2-\sqrt{2}}\ r$ কাজেই তার পরিধি হচ্ছে $8\sqrt{2-\sqrt{2}}\ r$ এবং ব্যাস 2r কাজেই এই অষ্টভুজকে বৃত্ত ধরা হলে π এর মান হচ্ছে :

$$\pi = \frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}\ r}{2r} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = 3.06...$$

আগের থেকে আরেকটু ভালো কিন্তু খুব বেশি ভালো নয়। কিন্তু সেটি বড় কথা নয়, বড় কথা হচ্ছে কীভাবে নিখুঁত π বের করতে হয় সেটা আমরা বের করে ফেলেছি। অষ্টভুজ না নিয়ে আমরা ষোলভুজ নিতে পারি তাহলে π এর মান আরো ভালো বের হবে, ষোলভুজ না নিয়ে বত্রিশভুজ নিতে পারি, তাহলে আরো ভালো বের হবে। বত্রিশভুজ না নিয়ে চৌষট্টিভুজ নিতে পারি— চৌষট্টিভুজ না নিয়ে একশ আটাশভুজ নিতে পারি এবং নিতে নিতে আমরা যত খুশি তত সূক্ষ্মভাবে π এর মান বের করতে পারি! কাজেই এখন বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো দেখা যাক :

ষোল ভুজ বাহুর দৈর্ঘ্য : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ r$

32 ভুজ বাহুর দৈর্ঘ্য : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ r$

64 ভুজ বাহুর দৈর্ঘ্য : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\ r$

কাজেই আমরা যদি 4096 ভুজকে নিয়ে চেষ্টা করি তাহেল সেটা হবে :

$$\pi = \frac{4096}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ ....\ +\sqrt{2}}}}}$$

মাইনাস চিহ্নের পর বর্গের ভেতর বর্গ হিসেবে মোট দশটি 2!

তোমাদের ভেতরে যার ধৈর্য আছে তারা হিসেব করে দেখতে পার, দেখবে—

$\pi = 3.141594618$— সত্যিকারের π এর মানের বেশ কাছাকাছি! তোমাদের ক্যালকুলেটরে চেষ্টা করলে তোমরা পাবে 3.14159264— কাজেই আর্কিমিডিসের পদ্ধতি ব্যবহার করে দশমিকের পর পাঁচঘর পর্যন্ত নিখুঁতভাবে বের করে ফেলা গেছে। আর্কিমিডিসের সময় ক্যালকুলেটর ছিল না, এমনকি দশমিক পদ্ধতিও ছিল না— কাজেই বর্গমূল বের করা কিংবা বর্গমূলের বর্গমূল বের করা একটা দুঃসাধ্য ব্যাপার ছিল কিন্তু সেই প্রতিভাবান বিজ্ঞানী সঠিক পথটি সত্যিই দেখিয়ে দিয়ে গিয়েছিলেন!

π এর মান ব্যবহার করার এর চাইতে সহজ পদ্ধতি কী আছে? অবশ্যি আছে কিন্তু সেটা খুঁজে বের করার জন্যে সপ্তদশ শতাব্দীতে ক্যালকুলাস আবিষ্কার হওয়া পর্যন্ত অপেক্ষা করতে হয়েছে। আমরা তার খুঁটিনাটির মাঝে না গিয়ে সবচে' সহজ সিরিজটির কথা বলি। যারা এর মাঝে ত্রিকোণোমিতির সুবাতাস গ্রহণ করতে শুরু করেছ তারা জান—

$\sin\theta = x \quad \sin^{-1}x = \theta$

$\cos\theta = x \quad \cos^{-1}x = \theta$

$\tan\theta = x \quad \tan^{-1}x = \theta$

ইচ্ছে করলে দেখানো যায় যে $\tan^{-1}x$ এভাবে লেখা যায় :

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{7} - \frac{x^7}{7} + ...$$

যারা ত্রিকোণোমিতি করেছ তারা সবাই জান $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ কাজেই

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ....$$

এটি হচ্ছে আরো একটি সিরিজ, আর্কিমিডিসের সিরিজ থেকে এটি সহজ কারণ এখানে বর্গমূল নিতে হয় না, শুধু সংখ্যা যোগ আর বিয়োগ করতে হয়। তবে π বের করার জন্য এটি সবচে' কার্যকর সিরিজ নয়, দশমিকের পর কয়েক ঘর পর্যন্ত নিখুঁত মান পাওয়ার জন্য অনেকগুলো সংখ্যা যোগ করতে হয়। দ্রুত π এর মান বের করার জন্য আরো নতুন নতুন সিরিজ বের হয়েছে এবং গণিতবিদরা সেগুলো ব্যবহার করে দশমিকের পর শতশত ঘর পর্যন্ত নিখুঁতভাবে π এর মান বের করতে শুরু করলেন।

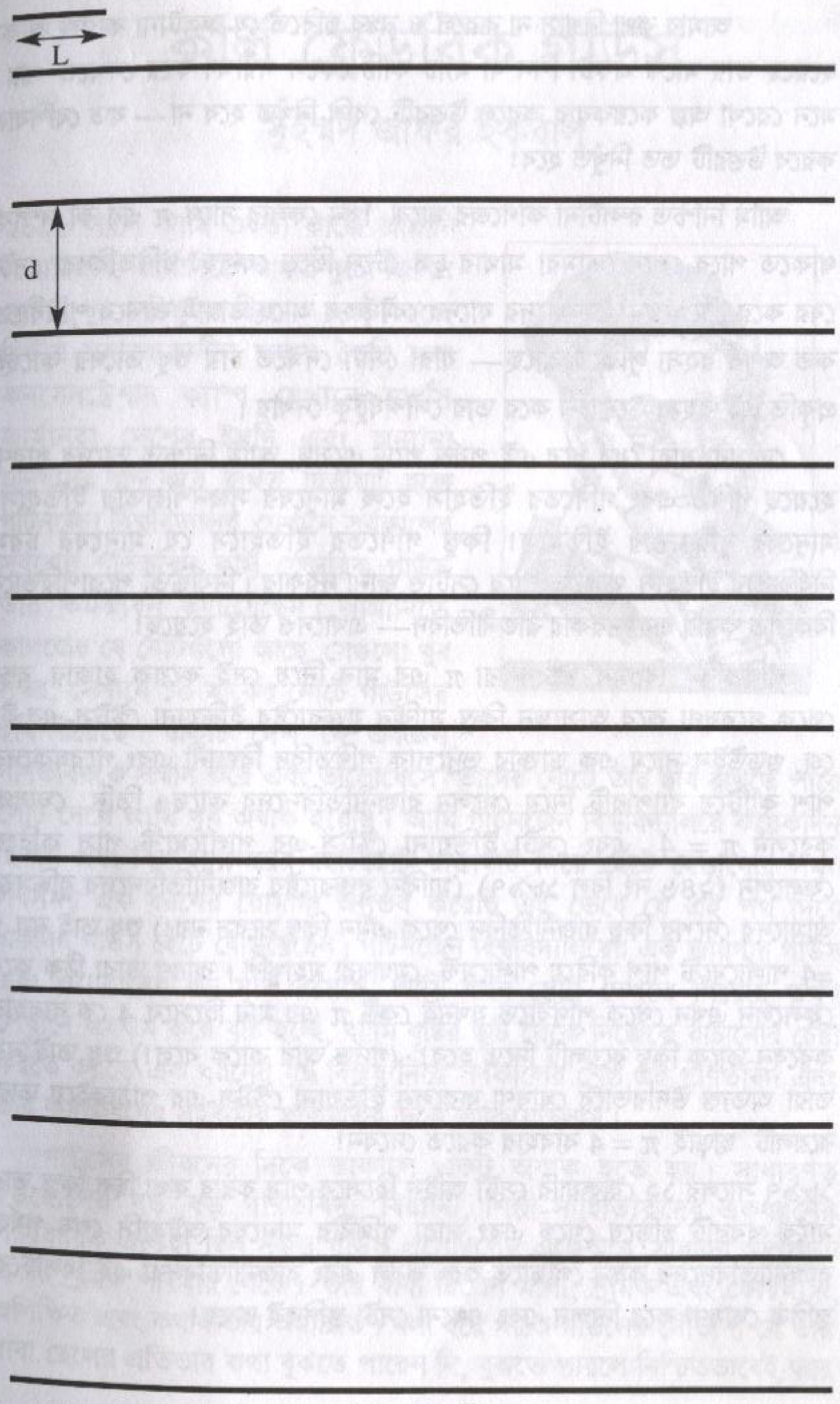
তবে π এর মান বের করা নিয়ে যে মোটামুটি হৃদয় বিদারক ঘটনা ঘটে নি তা নয় যেমন উইলিয়াম রাদারফোর্ড নামে একজন গণিতবিদ প্রায় সারা জীবন ব্যয় করে ১৮২৪ সালে π এর মান 208 ঘর পর্যন্ত বের করলেন। পরে দেখা গেল 153 ঘরের পর থেকে সেগুলো ভুল— তার প্রায় অর্ধেক জীবনের কাজ এক নিমিষে আক্ষরিক অর্থে জলে ভেসে গেল।

গণিতবিদদের এই অমানুষিক পরিশ্রম অবশ্যি আজকাল বন্ধ হয়ে গেছে। আজকাল কম্পিউটার ব্যবহার করে π এর মান বের করা শুরু করা হয়েছে, একজন গণিতবিদের সারা জীবনের পরিশ্রম কম্পিউটার ব্যবহার করে এক সেকেন্ডের ক্ষুদ্র ভগ্নাংশের মাঝে করে ফেলা যায়! এই লেখাটি লেখায় সময় ইন্টারনেটে উঁকি মেরে দেখা গেছে π এখন পর্যন্ত দশমিকের পর আড়াই কোটি ঘর পর্যন্ত বের করা হয়েছে এবং এখনো কাজ চলছে।

তোমরা কিন্তু মনে করো না π এর মান বের করার জন্য কম্পিউটারের ব্যবহার খুব নতুন জিনিস। কম্পিউটার আবিষ্কারের আগেও কিন্তু এর জন্যে কম্পিউটার ব্যবহার হয়েছে তবে সেগুলো ছিল 'মানুষ কম্পিউটার'! মাঝে মাঝেই কিছু মানুষের জন্ম হয় যারা প্রকৃতির খেয়ালে মাথায় ভেতরে বিশাল বিশাল যোগ-বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে ফেলতে পারে— যদিও তাদের সত্যিকারের কোনো সৃজনশীল ক্ষমতা নেই। সেরকম একজন মানুষ ছিল Martin Zacharias Dase (1824–1861) তাকে ব্যবহার করে গণিতবিদরা দু'মাসের মাঝে π এর মান দুশ ঘর পর্যন্ত বের করে ফেরেছিলেন! পৃথিবীর সবচে' বড় গণিতবিদদের অন্যতম কার্ল ফ্রেডরিক গাউস এই 'মানুষ কম্পিউটার'কে ব্যবহার করেছিলেন এবং বলা হয়ে থাকে কম্পিউটার আবিষ্কারের আগেই কম্পিউটার ব্যবহার করার কৃতিত্বটুকু তার!

তবে π এর মান বের করার জন্যে সবচে' বিচিত্র উপায়টির কৃতিত্ব পাবেন Comet De Buffon (1707–1788). তার নিয়মে π এর মান বের করার জন্যে L দৈর্ঘ্যের পিন d দূরত্বের রুল টানা কাগজের ওপর ফেলতে হয় (d থেকে L-এর দৈর্ঘ্য ছোট)। পিনগুলো যদি বিক্ষিপ্তভাবে রুলটানা কাগজের মাঝে ফেলা হয় তাহলে কোনো কোনো পিন লাইনকে স্পর্শ করবে, কোনো কোনোটি স্পর্শ করবে না। ধরা যাক দেখা গেল লাইনকে স্পর্শ করার সম্ভাবনা হচ্ছে P (অর্থাৎ দশবার পিনটি ফেললে যদি চারবার স্পর্শ করে তাহলে $P = \frac{4}{10}$) তাহলে π এর মান হচ্ছে :

$$\pi = \frac{2L}{Pd}$$



৪ নম্বর ছবি

আমার কথা বিশ্বাস না করলে ৪ নম্বর ছবিতে যে রুলটানা কাগজ আঁকা হয়েছে তার মাঝে একটা পিন বা ম্যাচ কাঠি ফেলে পরীক্ষা করে দেখতে পার। মনে রেখো অল্প কয়েকবার করলে উত্তরটি বেশি নিখুঁত হবে না— যত বেশিবার করবে উত্তরটি তত নিখুঁত হবে!

আমি নিশ্চিত রুলটানা কাগজের মাঝে পিন ফেলার সাথে π এর কী সম্পর্ক থাকতে পারে ভেবে তোমরা মাথার চুল টেনে ছিঁড়ে ফেলছ! গণিতবিদরা সেটা বের করে রেখেছেন! তোমাদের যাদের কৌতূহল আছে তারাই জানবে পৃথিবীতে কত অপূর্ব রহস্য লুকিয়ে আছে— যারা সেটা দেখতে চায় শুধু তাদের কাছেই প্রকৃতি এই রহস্য উন্মোচন করে তার সৌন্দর্যটুকু দেখায়।

তোমরা যারা ধৈর্য ধরে এই পর্যন্ত পড়ে এসেছ, আমি নিশ্চিত তাদের ধারণা হয়েছে গণিত এবং গণিতের ইতিহাস হচ্ছে মানুষের সৃজনশীলতার ইতিহাস, মানুষের বুদ্ধিমত্তার ইতিহাস! কিন্তু গণিতের ইতিহাসে যে মানুষের চরম নির্বুদ্ধিতার ইতিহাস থাকতে পারে সেটাও জানা দরকার। নির্বুদ্ধিতা পুরোপুরিভাবে বিকশিত করার জন্য দরকার রাজনীতিবিদ— এখানেও তাই হয়েছে!

গণিতবিদ, বিজ্ঞান, গবেষকরা π এর মান নিয়ে সেই কয়েক হাজার বছর থেকে গবেষণা করে আসছেন কিন্তু মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের ইন্ডিয়ানা স্টেটস-এর ই. জে. গুডউইন নামে এক ডাক্তার ভদ্রলোক গণিতবিদ বিজ্ঞানী এবং গবেষকদের পাশ কাটিয়ে ব্যাপারটি নিয়ে গেলেন রাজনীতিবিদদের কাছে। তিনি ঘোষণা করলেন $\pi = 4$ এবং সেটা ইন্ডিয়ানা স্টেটস-এর পার্লামেন্টে পাস করিয়ে ফেললেন (২৪৬ নং বিল ১৮৯৭) (মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের রাজনীতিবিদদের বুদ্ধিমত্তা আমাদের দেশের কিছু রাজনীতিবিদ থেকে এমন কিছু সরেস নয়!) শুধু তাই নয় $\pi = 4$ পার্লামেন্টে পাশ করিয়ে পার্লামেন্ট মেম্বাররা মহাখুশি। কারণ তারা ঠিক করে ফেললেন এখন থেকে পৃথিবীতে যখনই কেউ π এর মান হিসেবে 4 কে ব্যবহার করবেন তাকে কিছু রয়েলটি দিতে হবে! (গর্দভ আর কাকে বলে!) শুধু তাই নয় তারা অত্যন্ত উদারভাবে ঘোষণা করলেন ইন্ডিয়ানা স্টেটস-এর পাঠ্যবইয়ে তারা রয়েলটি ছাড়াই $\pi = 4$ ব্যবহার করতে দেবেন!

১৮৯৭ সালের ১২ ফেব্রুয়ারি সেটা আইন হিসেবে পাস করার কথা ছিল কিন্তু তার মাঝে খবরটি ছড়িয়ে গেছে এবং সারা পৃথিবীর মানুষের অট্টহাসি শেষ পর্যন্ত রাজনীতিবিদদের কানে পৌঁছাতে শুরু করল এবং রাজনীতিবিদরা এই বিলটিকে স্থগিত ঘোষণা করে দিলেন এবং এখনো সেটা স্থগিতই আছে!

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস

২০০০ সালে আমি একটা কাজে জার্মানি গিয়েছিলাম, জার্মানিতে আমার দুটো জিনিস দেখার খুব কৌতূহল ছিল— একটা হচ্ছে দ্বিতীয় মহাযুদ্ধকালীন সময়ে তৈরি করা কনসেনট্রেশান ক্যাম্প যেখানে নাৎসি জার্মানরা দেশের ইহুদি এবং অন্যান্য মানুষদের বন্দি করে রাখত, দ্বিতীয়টি হচ্ছে গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয় যেখানে সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতবিদ কার্ল ফ্রেডরিক গাউস তার কর্মজীবন কাটিয়েছেন। জার্মানিতে কাগজের যে নোটগুলো আছে সেগুলো খুব সুন্দর, সেখানে ১০ মার্কের নোটে গাউসের ছবি রয়েছে। একটি দেশ যে একজন গণিতবিদকে সম্মান করে এবং ভালোবেসে তাদের নোটে তার ছবি রাখতে পারে সেটি দেখে আমি খুব অবাক হয়েছি। আমি গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ে কয়েকদিন ছিলাম এবং বিশ্ববিদ্যালয়ের ছোটছোট রাস্তাঘাট দিয়ে হেঁটে বেড়ানোর সময় সবসময় এক ধরনের রোমাঞ্চ অনুভব করেছি এই ভেবে যে এই পথ দিয়ে একদিন গাউস হেঁটে বেড়িয়েছেন। গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ের এক জায়গায় গাউস এবং ওয়েবারের বড় মূর্তি রয়েছে, আমি যখন সেটা দেখতে গিয়েছি তখন সেখানে ঝমঝম করে বৃষ্টি হচ্ছে, আমি বৃষ্টির ছাট থেকে নিজেকে বাঁচানোর চেষ্টা করতে করতে এক ধরনের মুগ্ধ বিস্ময় নিয়ে সর্বকালের শ্রেষ্ঠ এই গণিতবিদ এবং তার কর্মজীবনের সহকর্মীর প্রতিমূর্তির দিকে তাকিয়েছিলাম।

গাউসের জীবনের দিকে তাকালে একটু অবাক হতে হয়। সাধারণত ইউরোপের বড় বড় গণিতবিদ, বিজ্ঞানী, শিল্পী-সাহিত্যিকদের একধরনের পারিবারিক ঐতিহ্য ছিল, কিন্তু গাউস এসেছিলেন একেবারে সাধারণ অশিক্ষিত একটি শ্রমিক পরিবার থেকে। তার বাবা ছিলেন মালী, শ্রমিক এবং ফোরম্যান, অশিক্ষিত এবং কথাবার্তায় অমার্জিত। বলা হয়ে থাকে গাউসের সৌভাগ্য যে তার বাবা ছেলের প্রতিভার কথা বুঝতে পারেন নি, বুঝতে পারলে নিশ্চিতভাবেই তার

শিশু প্রতিভাকে বাজারজাত করার চেষ্টা করতেন। গাউসের মা ছিলেন তার বাবার দ্বিতীয় স্ত্রী, বিয়ের আগে তিনি মানুষের বাসায় পরিচারিকার কাজ করতেন। স্বল্পশিক্ষিত এই মহিলা কিন্তু অসম্ভব বুদ্ধিমতী ছিলেন, পরিবারের আর কারো কাছে গাউস মানসিক সহায়তা পান নি। কিন্তু তার মা জীবনের ৯৭ বছরের একেবারে শেষদিন পর্যন্ত তার ছেলেকে অনুপ্রেরণা দিয়ে গেছেন।

বলা হয়ে থাকে গাউস কথা বলা শুরু করার আগেই অঙ্ক করতে পারতেন। শৈশবে তার গাণিতিক প্রতিভা নিয়ে অনেক মজার গল্প প্রচলিত আছে। তবে তিনি একটু বড় হয়েই আবিষ্কার করলেন তার আশেপাশে তার গাণিতিক প্রতিভা বোঝার মতো কোনো মানুষ নেই, গণিত নিয়ে, তার সৌন্দর্য নিয়ে কথা বলার কোনো লোক নেই। তিনি নিজে নিজে কাজ করতেন এবং সেটা ধীরে ধীরে তার চরিত্রের গঠন হয়ে গিয়েছিল— তার দীর্ঘ জীবনে কখনোই তিনি অন্য কারো সাথে কাজ করেন নি। প্রথম জীবনে জার্মানিতে তাঁর মতো উঁচু মাপের গণিতবিদ ছিল না— পরবর্তী জীবনে যখন বড় বড় গণিতবিদেরা এসেছেন ততদিনে তিনি একা একা কাজ করায় অভ্যস্ত হয়ে গিয়েছেন।

ব্যক্তিগত জীবনে সব হিসেবেই বলা যায় তার জীবনটা ছিল খুব সাধারণ। পঁচিশ বৎসর হওয়ার আগেই গণিত এবং জ্যোতির্বিদ্যায় তার নাম ছড়িয়ে পড়েছিল, তিরিশ বৎসর হওয়ার আগেই তিনি গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ে যোগ দেন, কিন্তু তার ব্যক্তিগত জীবন ছিল অত্যন্ত সাধারণ। গণিত বা বিজ্ঞানের খাতিরে হয়তো এক দু'বার তিনি গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ের বাইরে গিয়েছেন, এছাড়া পুরো জীবনটাই তিনি সেখানে কাটিয়ে দিয়েছেন। তিনি মানুষটি খুব রক্ষণশীল ছিলেন, গণতন্ত্র থেকে রাজতন্ত্রে তার বেশি বিশ্বাস ছিল, বিজ্ঞান এবং গণিতের বাইরে তার জগৎটা ছিল খুব ছোট এবং অকিঞ্চিতকর। শিক্ষা সাহিত্য সংগীত থেকে দূরে দূরে থেকে জীবন কাটিয়েছেন। মারা গিয়েছেন ৭৮ বৎসর বয়সে, নিরলসভাবে প্রায় অর্ধশতাব্দী গণিত এবং বিজ্ঞানের জন্যে একা কাজ করে গেছেন। কাজের ক্ষেত্র ছিল অনেক, জীবিকার তাগিদে অর্থকষ্ট থেকে মুক্তি পাওয়ার জন্যে তুমি-জরিপের মতো কাজেও দীর্ঘ সময় দিয়েছেন, পদার্থবিজ্ঞানেও কাজ করেছেন, চৌম্বক ক্ষেত্রের ইউনিটে তার নামটি ব্যবহৃত হয়, যদিও পদার্থবিজ্ঞান, জ্যোতির্বিজ্ঞান কিংবা অন্য সব বিষয় থেকে গণিতে তার অবদান অনেক অনেক বড়।

গাউসের জন্ম হয় ১৭৭৭ সালের ৩০ এপ্রিল, জার্মানির ব্রান্সউইক শহরে। ১১ বৎসর বয়সে প্রাথমিক এবং মাধ্যমিক স্কুল শেষ করার পর তাকে হাই স্কুলে (সেখানে বলা হয় জিমনাসিয়াম) যাবার জন্যে গাউসের বাবাকে অনেক কষ্টে রাজি করাতে হয়েছিল। বলাই বাহুল্য তিনি হাই স্কুলে অসম্ভব ভালো করলেন— যদিও পুরোটুকু ছিল তার ব্যক্তিগত প্রচেষ্টার ফল। ১৪ বছর বয়সে তিনি তার শহরের ডিউক থেকে এক ধরনের বৃত্তি পেয়ে গেলেন যে কারণে পড়াশোনার খরচ চালানো নিয়ে তার মাথা-ব্যথা দূর হয়ে গেল।

১৭৯২ সালে গাউস ব্রান্সউইকের কার্নোলিয়াম কলেজে ভর্তি হলেন, সেখানে তিনি তিন বছর ছিলেন। সে সময়ে একজনের যে পরিমাণ পাড়াশোনা করার কথা গাউসের পড়াশোনা ছিল তার থেকে অনেক বেশি। কলেজের পাঠ্যসূচিতে অনেক কিছু পড়ার আগেই তিনি নিজে থেকে সেগুলো আবিষ্কার করে পড়ে বসে থাকতেন। পরীক্ষা থেকে পাওয়া সংজ্ঞা এবং টেবিল দেখে তার ভেতরের অন্তর্নিহিত সূত্রটি বলে দেয়ার তার প্রায় একটি অলৌকিক ক্ষমতা ছিল। তার বিখ্যাত প্রাইম নাম্বারের সূত্রটি তিনি তখন বলেছিলেন যেটি শেষ পর্যন্ত প্রায় একশ বৎসর পর প্রমাণ করা হয়।

কলেজ শেষ করে তিনি গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ে পড়তে এলেন। কলেজে বইপত্র জার্নাল সেরকম ছিল না। কিন্তু গটিনজেনে এসে সেগুলো তার নাগালে চলে এলো, তার মনে হলো তিনি বুঝি সোনার খনি পেয়ে গেছেন। তিনি লোভীর মতো গোগ্রাসে সেগুলো আবিষ্কার করতেন এবং প্রায়ই অবাক হয়ে আবিষ্কার করতেন, তার অনেক আবিষ্কারই নতুন নয় তার আগে অন্য কেউ আবিষ্কার করে রেখেছে। সে সময়ে গটিনজেনে যেসব গণিতবিদ ছিলেন তারা মোটামুটি মেধাহীন ছিলেন এবং তাদের দেখে তিনি এত মোহভঙ্গ হয়েছিলেন যে তিনি মাঝখানে একবার ঠিক করলেন তিনি ভাষাবিদ (Philologist) হবেন। ঠিক তখন তিনি প্রায় দুই হাজার বৎসরের অসাধ্য একটি সমস্যার সমাধান করে (রুলার এবং কম্পাস ব্যবহার করে সম-সতেরোভুজ আঁকা) সবাইকে তাক লাগিয়ে দিলেন। কথিত আছে এই অসাধারণ সমাধানটি যখন তার মাথায় এসেছে তিনি সেটা নিয়ে তার বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতের একজন অধ্যাপকের সাথে কথা বলতে গিয়েছিলেন, সেই অধ্যাপক ব্যাপারটিতে কোনো উৎসাহই দেখান নি।

ছাত্র হিসেবে গটিনজেনে থাকার সময় গাউসের প্রতিভা এক ধরনের পূর্ণতা লাভ করে এবং ১৭৯৮ সালে তিনি তার শহরে ফিরে এসে একা একা গণিতের ওপর কাজ করতে শুরু করেন। এলজেবরার মূল চারটি থিওরেমের প্রমাণ বের করে ১৮০১ সালে তিনি তার ডক্টরেট লাভ করেন। বলা হয়ে থাকে ডক্টরেট করার সময় যিনি তার শিক্ষক ছিলেন গাউস তার থেকে অনেক বেশি জানতেন।

পরবর্তী দশ বৎসরকে বলা হয় গাউসের জীবনের স্বর্ণ-দশক। অসংখ্য নতুন নতুন ভাবনা তার মাথায় এসেছে, সেগুলো নিয়ে তিনি কাজ করেছেন। এর আগে গণিতের যত কাজ হয়েছে, তিনি সেগুলোর সারসংক্ষেপ তৈরি করে লিপিবদ্ধ করেছেন, অতীতের সমাধান খুঁজে না পাওয়া সমস্যার সমাধান বের করেছেন। তিনি গবেষণার জন্যে যে ক্ষেত্রটি তৈরি করেছেন সেটি এখনো ব্যবহার করা হয়। গণিতের বিভিন্ন শাখায় তার গবেষণার তালিকাটি দীর্ঘ এবং সাধারণ মানুষের হৃদয়ঙ্গম করার কোনো সুযোগ নেই। ১৮০১ সালে একজন জ্যোতির্বিদ নতুন

একটা গ্রহকণা আবিষ্কার করে সেটাকে আবার হারিয়ে ফেললেন, কিছুতেই সেটাকে আকাশে আর খুঁজে পান না। গাউস সমস্যাটাকে একটা চ্যালেঞ্জ হিসেবে নিলেন। গ্রহটির কক্ষপথকে বৃত্তাকার না ধরে আরো নিখুঁত উপবৃত্তাকার হিসেবে ধরে লিস্ট স্কয়ার পদ্ধতি ব্যবহার করে ঠিক কোথায় খুঁজলে গ্রহটিকে পাওয়া যেতে পারে সেটা বলে দিলেন, এবং জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা সত্যি সত্যি সেখানে খুঁজে গ্রহটাকে পেয়ে গেলেন। এত কম তথ্য থেকে এরকম নিখুঁত হিসেব করে যে এভাবে একটি গ্রহ কণার অবস্থান বলে দেয়া যায় সেটি কেউ কখনো করতে পারে নি!

গাউস তখন গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ে শিক্ষক হিসেবে যোগ দেওয়ার প্রস্তুতি নিচ্ছিলেন। মজার ব্যাপার হলো তিনি কিন্তু গণিতের অধ্যাপক হতে রাজি হচ্ছিলেন না তার কারণ গণিতের ছাত্ররা হয় 'অনিচ্ছুক' ছাত্র— পড়াশোনায় তাদের উৎসাহ নেই, জোর করে পড়াতে হয়! সে তুলনায় জ্যোতির্বিজ্ঞান তার কাছে অনেক বেশি উৎসাহব্যঞ্জক মনে হতো— হারিয়ে যাওয়া গ্রহ খুঁজে দিয়ে এর মাঝে তিনি জ্যোতির্বিদ হিসেবেও সুপরিচিত হয়ে গেছেন। শেষ পর্যন্ত ১৮০৭ সালে তিনি গটিনজেন বিশ্ববিদ্যালয়ে যোগ দিলেন।

এর পরবর্তী ইতিহাস তার কাজ এবং গবেষণার একটি নিঃসঙ্গ ইতিহাস। কখনোই আর্থিকভাবে সচ্ছল ছিলেন না বলে জরিপের কিছু কাজ করেছেন, পদার্থ বিজ্ঞান এবং জ্যোতির্বিজ্ঞানের কথা আগেই বলা হয়েছে। গণিতে তার অসামান্য দখল তাকে জগৎজোড়া খ্যাতি দিয়েছে কিন্তু মানুষ হিসেবে তিনি খুব অসুখী ছিলেন। তার জীবন ছিল একই সাথে জটিল এবং দুঃখী। ফরাসী বিপ্লব, নেপোলিয়নের আবির্ভাব, জার্মানিতে গণতান্ত্রিক আন্দোলনের সময় তিনি রাজনৈতিকভাবে অস্থিতিশীল এবং অর্থনৈতিকভাবে বিপর্যস্ত ছিলেন। গণিতের জগতে তিনি ছিলেন পুরোপুরি নিঃসঙ্গ-সমবেদনাহীন বাবা, প্রথম স্ত্রীর অকাল মৃত্যু, অসুস্থ দ্বিতীয় স্ত্রী, সন্তানদের সাথে খারাপ সম্পর্ক সব মিলিয়ে তার জীবনটি ছিল খুব করুণ। তার একমাত্র সুখের সময় ছিল যখন তার প্রথম স্ত্রী বেঁচে ছিলেন। তৃতীয় সন্তানের জন্ম দেবার সময় বিয়ের পাঁচ বছরের মাঝে তার স্ত্রী মারা যাবার পর তার মন একেবারে ভেঙে যায়, তিনি এক গভীর দুঃখের মাঝে নিমজ্জিত হন এবং কখনোই সেই দুঃখ এবং নিঃসঙ্গতা থেকে মুক্তি পান নি।

অশিক্ষিত অমার্জিত একজন শ্রমিক-পিতা এবং একজন গৃহ-পরিচারিকা মাতার সন্তান, গণিতের জগতের মুকুটহীন সম্রাট কার্ল ফ্রেডরিক গাউস জীবনের শেষ মুহূর্ত পর্যন্ত কাজ করতে করতে ১৮৫৫ সালের ফেব্রুয়ারির শেষ দিকে পৃথিবী থেকে বিদায় নিলেন। পৃথিবীতে তার উপস্থিতি এখন না থাকতে পারে কিন্তু গণিতের অবিস্মরণীয় জগতে তার উপস্থিতি কিন্তু কোনোদিনই শেষ হয়ে যাবে না।

ধারা

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

ধারা এবং ধারার সমষ্টির সঙ্গে স্কুলেই পরিচয় ঘটে। $1 + 2 + ... + 100$এর মান কত এ নিয়ে সুন্দর গল্প আছে। জগদ্বিখ্যাত গণিতবিদ গাউসকে নিয়ে এক গল্প আছে। ছোটবেলায় তিনি খুব অস্থিরমতি এবং দুষ্টু থাকায় ক্লাসের শিক্ষকের খুব অসুবিধা হতো। তাই কিশোর গাউসকে ব্যস্ত রাখার জন্য শিক্ষক উপরের যোগফলটি নির্ণয় করতে বলেছিলেন এই আশায় যে অনেকগুলো সংখ্যা লেখা এবং যোগ করতে তার বেশ কিছুটা সময় লেগে যাবে। শিক্ষককে ভুল প্রমাণ করে গাউস লক্ষ করলেন যে ধারাটি একবার সোজা এবং একবার উল্টা দিক থেকে লিখলে প্রতি জোড়া সংখ্যার যোগফল সমান হয়।

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 100$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + ... + 101 = 100.101$$
$$\therefore S = 50.101 = 5050$$

যা হোক শিক্ষককে পড়ে সময় ব্যয় করে গাউসের পদ্ধতি প্রমাণ করতে হয়েছিল। এ ধরনের ধারার যোগফলকে প্রকাশ করার জন্য Σ (সিগমা) চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়।

$$S = \sum_{K=1}^{100} K$$ যার অর্থ হলো—

K-এর মানসমূহ যোগ করতে হবে যেখানে k-এর মান 1 থেকে 100 পর্যন্ত। বিখ্যাত গণিতবিদ ফুরিয়ে (Fourier) ১৮২০ সালে এই চিহ্নটির ব্যবহার শুরু করেন। $a_1 + a_2 + ... + a_n$ কে এই পদ্ধতিতে

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{1 \le k \le n} a_k = \sum_{1 \le k \le n} a_k$$ হিসেবেও লেখা যায়।

ধারার সমষ্টি নির্ণয়ে নিম্নলিখিত সূত্রগুলো ব্যবহার করা হয়।

$$\sum_{k=1}^{n} Ca_k = C \sum_{k=1}^{n} a_k$$ (ডিস্ট্রিবিউটিভ ল)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$ (অ্যাসোসিয়েটিভ ল)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\rho(k)} a_{\rho(k)}$$ (কম্যুট্যাটিভ ল)

যেখানে $\rho(k)$-এর মান 1, 2, ..., n হয়।

ধারার পাশাপাশি সংখ্যার পার্থক্য যদি ধ্রুব সংখ্যা হয় তাহলে ধারাকে সমান্তর ধারা (Arithmetic Progression) বলে। আবার পাশাপাশি সংখ্যার অনুপাত যদি ধ্রুব হয় তাহলে তাকে সমানুপাতিক ধারা (Geometric progression) বলে। সমান্তর ধারার সাধারণ পদকে $a + bk$ হিসেবে লেখা যায়। সেই অর্থের সমান্তর ধারার যোগফল $s = \sum_{0 \le k \le n} (a+bk)$ হিসেবে প্রকাশ করা যায়। গাউসের পদ্ধতি ব্যবহার করে আমরা পাই

$$S = a + (a + b) + (a + 2b) + ... + (a + nb)$$
$$S = (a + nb) + (a + (n - 1)b) + ... + a$$

$$2S = (2a + nb) + (2a + nb) + ... + (2a + nb)$$

$$\therefore s = \frac{(2a + nb)(n + 1)}{2} = (a + \frac{1}{2}nb)(n + 1)$$

ধারাটি যদি সমানুপাতিক হয় তাহলে $S_n = \sum_{0 \le k \le n} ax^k$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^\circ + \sum_{0 \le k \le n} ax^{k+1} = ax^\circ + x \sum_{0 \le k \le n} ax^k = ax^\circ + x.S_n$$

$S_n(1 - x) = ax^\circ - ax^{n+1}$ $x \ne 1$ হলে

$$S_n = \frac{a(1 - x^{n+1})}{1 - x}$$

এবার আরো একটু জটিল ধারার সমষ্টি বের করার চেষ্টা করি।

$S_n = \sum_{0 \le k \le n} k2^k$ এটা না সমান্তর ধারা না সমানুপাতিক ধারা

$$S_0 = 0, S_1 = 2, S_2 = 10, S_3 = 34, S_4 = 98$$

$$S_n + (n + 1).2^{n+1} = \sum_{0 \le k \le n} (k+1)2^{k+1} = \sum_{0 \le k \le n} k.2^{k+1} + \sum_{0 \le k \le n} 2^{K+1}$$

$$= 2 \sum_{0 \le k \le n} k.2^K + 2 \sum_{0 \le k \le n} 2^K$$
$$= 2S_n + 2(2^{n+1} - 1)$$
$$\therefore S_n = (n + 1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 = (n - 1)2^{n+1} + 2$$

2-এর পরিবর্তে x থাকলে $\sum_{0 \le k \le n} Kx^k = \frac{x - (n + 1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$, $x \ne 1$

আমরা কিন্তু ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ব্যবহার করেও একই সমাধানে আসতে পারি।

আমরা জানি $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

এবার উভয় দিকে ডেরিভেটিভ নিলে পাই

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1 - x)(-(n + 1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2}$$
$$= \frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$$

কম্পিউটার বিজ্ঞানে বিভিন্ন অ্যালগরিদমের বিশ্লেষণে নিম্নোক্ত ধারাটি ব্যবহার করা হয় $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

এই ধারাকে হারমোনিক সিরিজ বলে। যদিও ধারাটির প্রতিটি পদ ক্রমশ শূন্যের দিকে যাচ্ছে এর যোগফল কিন্তু সসীম নয় অসীম। এটা প্রমাণ করা কঠিন নয়। ধারাটির যোগফল সসীম হলে যথেষ্ট সংখ্যক পদের পর বাকি পদসমূহের যোগফল নগন্য হবে। কিন্তু আমরা দেখাব যথেষ্ট সংখ্যক পদের পর আরো পদ আছে যার যোগফল কমপক্ষে $\frac{1}{2}$। মনে করি, n-এর যথেষ্ট মানের জন্য আমরা 2^n পদ নেই।

$$H_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n}$$

এবার $H_{2^{n+1}} =$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + ... + \frac{1}{2^n + 2^n}\right)$$

এবার দ্বিতীয় অংশে 2^nটি পদ রয়েছে যার প্রতিটির মান কমপক্ষে $\frac{1}{2.2^n}$ অর্থাৎ এই পদগুলোর যোগফল কমপক্ষে $\frac{1}{2}$। সুতরাং ধারাটির যোগফল অসীম। প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যেতে পারে যে এই ধারার যোগফলের সংশ্লিষ্ট কনটিনিউয়াস ফাংশন হলো $\ln n\ H_n \approx \ln n + \gamma$ যেখানে $\gamma \approx 5.77$ হলো অয়লারের ধ্রুব। এবার আমরা একাধিক প্যারামিটার ভিত্তিক ধারার যোগফল নির্ণয় করব।

$$S_n = \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{1}{k-j}$$ এখানে $S_1 = 0,\ S_2 = 1,$

$$S_3 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}$$

$$= \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j < k} \frac{1}{k-j}$$ এবার $k - j$-এর পরিবর্তে j বসিয়ে

$$= \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j < k} \frac{1}{j} = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{0 < j \le k-1} \frac{1}{j} = \sum_{1 \le k \le n} H_{k-} = \sum_{0 \le k < n} H_k$$

এবার S_n-কে অন্যভাবে প্রকাশ করা যাক।

$$S_n = \sum_{1 \le j < k \le n} \frac{1}{k-j}$$ k-কে $k + j$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে

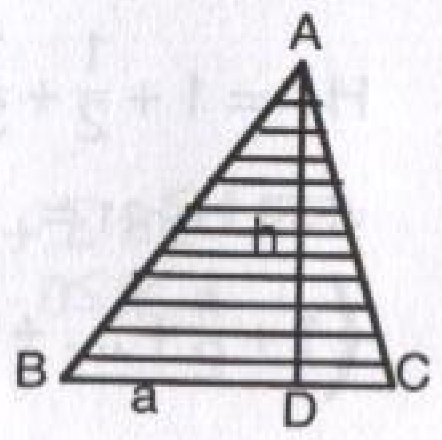
$$= \sum_{1 \le j < k+j \le} \frac{1}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \sum_{1 \le j \le n} \frac{1}{k} = \sum_{1 \le k \le n} \frac{n-k}{k}$$

$$= \sum_{1 \le k \le r} \frac{n}{k} - \sum_{1 \le k \le n} 1 = nH_n - n$$

$$\therefore \sum_{0 \le k \le n} H_k = nH_n - n$$

সিরিজ যোগ করে যে কত সমস্যার সমাধান করা যায় তার কিছু উদাহরণ দিচ্ছি।

একটি ত্রিভুজের ভূমি a এবং উচ্চতা h ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



উত্তর : আমরা BC বাহুকে সমান্তরাল রেখে A বিন্দুর দিকে নিয়ে গেলে ত্রিভুজের ভূমি BC ছোট হতে হতে A বিন্দুতে গিয়ে শূন্য হবে। এই ছোট হওয়াটা

উচ্চতার সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। উচ্চতা অর্ধেক হলে ভূমিও অর্ধেক হয়ে যাবে, উচ্চতা $\frac{h}{4}$ হলে ভূমিও $\frac{a}{4}$ হয়ে যাবে। এবার ত্রিভুজকে BC বাহুর সমান্তরাল অনেকগুলি বাহু দিয়ে ভাগ করি। D বিন্দু থেকে x উচ্চতায় ভূমির দৈর্ঘ্য হবে $\frac{h-x}{h}a$. এবার ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে ছোট ছোট ট্র্যাপেজিয়ামগুলোর যোগফল। উচ্চতাকে যদি n ভাগে ভাগ করা হয় তাহলে ট্র্যাপেজিয়ামের উচ্চতা হবে $\frac{h}{n}$ এবং n যদি খুব বড় হয় তাহলে ট্র্যাপেজিয়ামগুলোকে আয়তক্ষেত্র হিসেবে ধরা যাবে। সেক্ষেত্রে i তম ট্র্যাপেজিয়ামের ক্ষেত্রফল হবে $\sim \frac{h - \frac{ih}{n}}{h} . a . \frac{h}{n}$

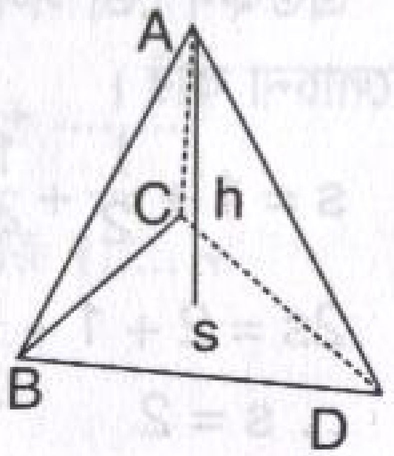
তাহলে ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল হবে

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h - \frac{ih}{n}}{h} . a . \frac{h}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h(n-i)}{nh} . a . \frac{h}{n} = \frac{ah}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)$$

$$= \frac{ah}{n^2} \sum_{i=0}^{n} i = \frac{ah}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{ah}{2}$$

যেহেতু n খুব বড় হলে $\frac{n+1}{n} = 1$

এবার আমরা পিরামিডের আয়তন বের করি। পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল s এবং উচ্চতা h.



আবার h উচ্চতাকে BCD ভূমির সমান্তরাল করে n ভাগে বিভক্ত করি। BCD ত্রিভুজের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যই A থেকে যত দূরে ভূমি রয়েছে তার সমানুপাতিক হবে। অর্থাৎ $\frac{h}{2}$ উচ্চতায় প্রতিটি বাহুই অর্ধেক হবে এবং ক্ষেত্রফল $\frac{1}{4}$ হবে।

A থেকে x দূরত্বে অবস্থিত ভূমির ক্ষেত্রফল $s(x) = s \cdot \frac{x^2}{h^2}$ হবে। এবার ABCD পিরামিডকে যে n ভাগে ভাগ করা হলো তার প্রত্যেক অংশকে প্রিজম হিসেবে ভাগ করা যায়। যতই n বড় হবে ততই প্রিজমের আয়তন পিরামিডের খণ্ডাংশের আয়তনের সমান হবে। উপর থেকে হলে i – তম খণ্ডাংশের আয়তন হবে $s(\frac{i}{n}h) \cdot \frac{h}{n} = s . \frac{i^2h^2}{n^2.h^2} \frac{h}{n} = S \frac{i^2h}{n^3}$

এবার এই সিরিজটির যোগফল বের করি।

$$\sum_{i=0}^{n} S.\frac{i^2h}{n^3} = \frac{S.h}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

যোগ চিহ্নের ভেতরের পদগুলোর যোগফল বের করতে পারলেই হলো।

মনে করি, $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{0\le j\le n}(i^3+3i^2+3i+1) = S_n+3+3\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$\therefore 3\sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 3\sum_{i=0}^{n} i - (n+1)$$

$$= (n+1)^3 - 3.\frac{n(n+1)}{2} - (n+s) =$$

$$\frac{(n+1)}{2}\left\{2(n+1)^2 - 3n - 2\right\}$$

$$= \frac{n+1}{2}(2n^2+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

∴ পিরামিডের আয়তন $= \frac{sh}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{sh}{3}$

এতক্ষণ তো সসীম ধারার যোগফল বের করলাম। এবার অসীম ধারা নিয়ে আলোচনা করি।

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2 + s$$

$$\therefore s = 2$$

কিন্তু $T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$

$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + = T - 1$$

$$\therefore T = -1$$

কম্পিউটারে ইনফিনিটির বাইনারি রূপ কিন্তু 1 + 2 + 4 + 8 + ... এর সমান। আসলে T অসীম হওয়ায় এই সমস্যা হয়েছে। যে সকল সিরিজের যোগফল সসীম শুধু সেসকল ক্ষেত্রেই যোগের বিভিন্ন নিয়মকানুন প্রযোজ্য। আরেকটি উদাহরণ দেওয়া যাক

$$\sum_{k\le 0}(-1)^k = 1-1+1-1+1-1+\dots$$

আমরা যদি দু'টি করে জোড়া তৈরি করি তাহলে যোগফল D হয়।

$\sum_{k\le 0}(-1)^k = (1-1)+(1-1)+1-1) = 0+0+0+\dots$ কিন্তু

আবার

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots = 1-0-0-0 = 1$$

আসলে যত বেশি পদই নেই না কেন পদের সংখ্যা জোড় হলে যোগফল 0 অন্যথায় যোগফল 1 হবে। সুতরাং এ ধরনের ধারার যোগফলের লিমিট নাই।

আমরা যদি $\sum_{k\ge 0} x^k = \frac{1}{1-x}$ এ $x = -1$ বসাই তাহলে ফল পাব $\frac{1}{2}$

অনেকগুলো পূর্ণসংখ্যার যোগ ও বিয়োগফল হলো একটি ভগ্নাংশ। এবার আরেকটি সিরিজ দেখি

$\sum_k a_k$ যেখানে $a_k = \frac{1}{k+1}$ যদি $k\ge 0$ হয় এবং $a_k = \frac{1}{k-1}$ যদি $k<0$ হয়।

তাহলে সিরিজটি হচ্ছে—

যেখানে

$$\dots + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

এবার 1 কে মাঝখানে রেখে সাজালে সিরিজের যোগফল দাঁড়ায় 1.....+

$$\left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + (1) + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\right) + \dots$$

কিন্তু মাঝখানে $-\frac{1}{2}$ রাখলে nটি বন্ধনীর ভেতরের যোগফল হয় $1 - \frac{1}{n}\ \frac{1}{n+1}$

$$\dots + \left(-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

আবার আমরা যদি অন্যভাবে সন্নিবেশ করি।

$$\dots + \left(-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots$$

তাহলে nth বন্ধনীর মধ্যে পাব

$$-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}-\ldots-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=1+H_{2n}-H_{n+1}$$

উচ্চতর গণিত ব্যবহার করে দেখানো যায় যে, $\lim_{n\to\alpha}(H_{2n}-H_{n+1}) =$ ln2 এক্ষেত্রেও প্রকৃত পক্ষে এ ধরনের সিরিজের যোগফল নেই।

একটি ভাগ্যচক্রের খেলা। চক্রটিতে 1 থেকে 1000 পর্যন্ত সংখ্যা দিয়ে ঘর চিহ্নিত করা আছে। চক্রটি ঘুরিয়ে দেয়ার পর যে সংখ্যাটি (n) উঠবে তা যদি $\left\lfloor\sqrt[3]{n}\right\rfloor$ দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে খেলোয়াড় 5 টাকা পাবে অন্যথায় যে 1 টাকা দেবে। এই খেলাটি খেলে টাকা উপার্জন করা সম্ভাবনা কতটা ?

যদি w বার জেতা যায় তাহলে হারার সংখ্যা L = 100 – w যদি চক্রটি ঘুরালে যে কোনো সংখ্যাই উঠার সম্ভাবনা সমান নয় তা হলে গড় লাভ

$$\frac{5w-L}{1000}=\frac{5w-(1000-w)}{1000}=\frac{6w-1000}{1000}$$

জেতার সংখ্যা 167 কিংবা তার বেশি হলে খেলাটিতে লাভ হবে।

একটু হিসেব করলে দেখা যাবে w = 172 যদিও গণনা করে এই ফলাফলকে স্বল্প সময়েই আসা সম্ভব চক্রে যদি 1,000-এর পরিবর্তে 1,000,000টি দাগ কাটা থাকে তাহলে কিন্তু কোনো সাধারণ পদ্ধতিতে উত্তরে পৌছানো যাবে না। যেভাবে হিসেবটি সহজে করা যায় তা নিম্নে দেওয়া হলো।

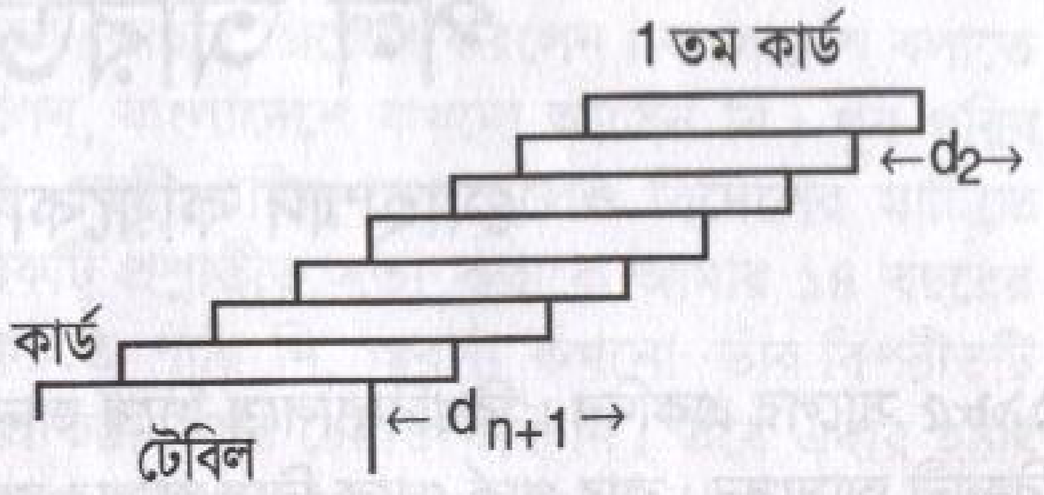
$$W=\sum_{k,m,n}\left[k^3\le n<(k+1)^3\right][n\ km][1\le n\le 1000][\quad]$$ তৃতীয় বন্ধনীর মধ্যে শর্ত দেয়া

$$=1+\sum_{k,m}\left[k^3\le km<(k+1)^3\right][1\le k<10]$$

$$=1+\sum_{k,m}\left[m\in[k^2,\ldots.(k+1)^3/k\right][1\le k<10]$$

$$=1+\sum_{1\le k<10}\left(\left\lceil k^2+3k+3+\frac{1}{k}\right\rceil-\left\lceil k^2\right\rceil\right)$$

$$=1+\sum_{1\le k<10}(3k+4)=1+\frac{7+31}{2}.9=172$$



একটি টেবিলের উপর কার্ডগুলোকে চিত্রানুসারে সাজাই। d_{n+1} এর সর্বোচ্চ মান কত হবে ?

প্রতিটি কার্ডের দৈর্ঘ্য z ধরলে kতম কার্ডের ভারকেন্দ্র (1তম কার্ডের ডান কোণ থেকে) হবে d_{k+1}

$$d_{k+1}=\frac{(d_1+1)+(d_2+1)+\ldots+(d_k+1)}{k}\ 1\le k\le n$$

$$kd_{k+1}=K+d_1+d_2+\ldots.+d_{k-1}+d_k,\ k\ge 0$$

$$(k-1)_{dk}=k-1+d_1+d_2+\ldots+d_{k-1}$$

$$kd_{k+1}-(k-1)d_k=1+d_k$$

$$\therefore d_{k+1}=d_k+\frac{1}{k}=d_{k-1}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}$$

$$\therefore d_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{k}=H_k$$

অর্থাৎ d_{k+1} এর মান যত খুশি বড় করা যাবে।

পল আরডস

মোহাম্মদ কায়কোবাদ

১৯৮৫ সালের একদিন। বিশ্ববিদ্যালয়ে গিয়ে জানতে পারলাম একজন নামকরা বিজ্ঞানী আসবেন। কার পার্ক থেকে নিয়ে আসার জন্য অধ্যাপক ইগর ক্লুভানেকের (তাঁর লেখা ম্যাথ অ্যানালাইসিসের একটি বই আণবিক শক্তি কেন্দ্রের লাইব্রেরিতে আছে) সঙ্গে আমাকেও যেতে হবে।

পল আরডস

এডেলাইড শহরের অদূরে বেডফোর্ড পার্কে পাহাড়ের গা বেয়ে গড়ে উঠেছে ফ্লিন্ডার্স ইউনিভার্সিটি অব সাউথ অস্ট্রেলিয়া। একেক ভবনের গ্রাউন্ড লেভেল একেক উচ্চতায়। কোনো ভবনের পঞ্চম তলা থেকে বের হয়েই দেখা যাবে ঘাস এবং অন্য ভবনের ফটক। এর ফলে কার পার্কও রয়েছে ৬/৭টি লেভেলে। যা হোক, অধ্যাপক ক্লুভানেকের সঙ্গে নির্দিষ্ট কার পার্কে অপেক্ষা করতে লাগলাম। গাড়ি এসে গেল। বের হয়ে এলেন বয়সের ভারে নুয়ে পড়া, অনেক ভাঁজের অস্পষ্ট মুখাবয়বের ছোটখাট মানুষটি, যাঁর গবেষণার বৈচিত্র্যে এবং সমস্যা সমাধানের দক্ষতায় ও সংখ্যায় বিজ্ঞানের ইতিহাসে কেউ অদ্যাবধি তাঁর সমকক্ষতা অর্জন করতে পারে নি। গাড়ি থেকে বের হয়েই উর্ধ্বমুখে ৪৫ ডিগ্রি কোণ করে আমার সামনে এসে হাত বাড়িয়ে জিজ্ঞেস করলেন, 'তোমার সমস্যা কোথায় ?' অভিভূত হয়ে গেলাম তাঁর প্রশ্নে। ডাকসাইটে অধ্যাপক ক্লুভানেককে বাদ দিয়ে প্রথমে আমার সঙ্গে করমর্দন। তারপর অপরিচিত আমাকে পরিচয় জিজ্ঞেস না করে আমার সমস্যার কথা জানা। এ না হলে কী আর একজন রক্তমাংসের নশ্বর মানুষ পল আরডস হতে পারে ? বন্ধুত্বে আর পরিচয়ে মানুষের চেয়ে 'সমস্যা' তাঁর কাছে সব সময়ই অগ্রাধিকার পেয়ে এসেছে। আমি তখন থিওরি অফ কম্পিউটেশনাল কমপ্লেক্সিটির সমস্যা নিয়ে হাবুডুবু খাচ্ছিলাম। পল আরডস এই বিষয়ে কাজ করেন না। তবে ৩০ সেকেন্ড ভেবে আমাকে যে উত্তর দিয়েছিলেন, তা প্রমাণ করতে আমার বছরখানেক লেগেছিল। এ কথাটি শুধু আমার মতো অতি সাধারণ গ্রাজুয়েট ছাত্রের জন্য প্রযোজ্য ছিল না, বিগত ৬টি দশক অনেক নামকরা গণিতবেত্তাকেই বছরের পর বছর বিভিন্ন থিওরেম প্রমাণের চেষ্টা করে এই

মানুষটির অন্তর্জ্ঞানের গভীরতা উপলব্ধি করতে হয়েছে। যা হোক, সমস্যার পরিচয় শেষে নাম জিজ্ঞেস করলেন, দেশ কোথায় জিজ্ঞেস করলেন। বাংলাদেশ বলাতে জানালেন, কোলকাতা এসেছিলেন, বাংলাদেশে কখনো আসেন নি। খুব গরিব দেশ। বাংলাদেশ প্রকৃতপক্ষেই একটি গরিব দেশ হলেও বিদেশের মাটিতে বিদেশীদের মুখ থেকে এমন একটি প্রশ্নাতীত সত্য কথাকে আমার ১৪ বছরের প্রবাস জীবনে কখনো গ্রহণ করতে পারি নি, অবশ্য কখনো তাঁর বিপরীতটি যুক্তিতর্ক কিংবা উদাহরণ দিয়ে প্রতিষ্ঠা করার চেষ্টাও করি নি। তবে এবার হঠাৎ করেই মনে হলো এই বিশ্ববিখ্যাত গণিতবেত্তার আমার দেশের দারিদ্র্য সংক্রান্ত বক্তব্যকে চ্যালেঞ্জহীনভাবে ছেড়ে দেওয়া যায় না, যদিও তাঁর গণিতকে কোনোদিনই হয়তো প্রশ্ন করতে পারব না। আমি বললাম, এটা মানদণ্ডের ওপর নির্ভর করে। শুনে খুব আশ্চর্য হয়ে বললেন, 'বাংলাদেশকে গরিব বলতে আবার মানদণ্ড উল্লেখ করতে হবে নাকি ?' আমি উত্তর করলাম, 'দেখুন প্রতি বর্গ কিলোমিটারে বাংলাদেশের আয় অস্ট্রেলিয়ার থেকে ঢের বেশি।' উত্তরটি যে তাঁর জন্য অপ্রত্যাশিত ছিল তা বুঝতে কোনো অসুবিধা হলো না। কিছুক্ষণের মধ্যেই সেমিনার শুরু হলো। কক্ষটি কানায় কানায় ভর্তি, তার ওপর বক্তার উচ্চতা অতিশয় কম হওয়ায় (৫ ফুট হবে বড় জোর) এই বিশ্বখ্যাত পণ্ডিতকে দেখার জন্য সেমিনার কক্ষে শ্রোতাদের দেহের উপরিভাগের অবস্থান পরিবর্তনের হার একটু মাত্রাতিরিক্ত ছিল।

সেমিনারের বিষয়বস্তু নোটিশে কিছু দেওয়া ছিল না। অধ্যাপক আরডস ব্লাকবোর্ডের পাশে দাঁড়িয়ে সমানে একের পর এক সমস্যা লিখে গেলেন এবং প্রতি সমস্যার পর ৫০ ডলার, ১০০ ডলার সমাধানকারীকে দেবেন বলে প্রতিশ্রুতি দিতে থাকলেন। আবার কোনো সমস্যা দীর্ঘদিন ধরে সমাধানের অপেক্ষায় থাকলে পুরস্কারের পরিমাণ বাড়িয়ে দিলেন। এই হলো পল আরডস। ৫০ হাজার ডলারের 'উলফ' পুরস্কারসহ অনেক পুরস্কারই তিনি জীবনে পেয়েছেন যার সম্পূর্ণটাই পৃথিবীর গণিতানুরাগীদের সমস্যা সমাধানে উৎসাহিত করার জন্য ব্যয় করেছিলেন। বাড়ি, গাড়ি, সম্পদ বলতে জীবনে তাঁর কিছুই ছিল না। একমাত্র ভালোবাসা ছিল গণিতের প্রতি, গণিতের সৌন্দর্যের প্রতি ছিল তাঁর অপরিসীম অনুরাগ।

পল আরডসের জন্ম হয় হাঙ্গেরির বুদাপেস্টে ১৯১৩ সালের ২৬ মার্চ এক ইহুদি পরিবারে। তাঁর জন্মের কয়েকদিন আগে তাঁর দুই বোনের মৃত্যু হয়। প্রথম বিশ্বযুদ্ধের শুরুতেই তাঁর পিতা লাইয়সকে রাশিয়ানরা বন্দি করে সাইবেরিয়া নিয়ে যায়। গণিতের স্কুল শিক্ষক পিতামাতার একমাত্র সন্তান পল যথাসময়ে স্কুলে না গিয়ে বাসায় পড়ালেখা শুরু করেন। ১৯২০ সালে পলের পিতা কারাগার থেকে ফিরে এসে কারাগারে নিজের চেষ্টায় শেখা ইংরেজি ছেলেকে শেখান। অধ্যাপক

আরডস সারা জীবন সেই ইংরেজি উচ্চারণে হাজার হাজার বক্তৃতা দিয়েছেন শত শত বিশ্ববিদ্যালয়ে ও কনফারেন্সে। পল আরডস ১৯৩০ সালে বুদাপেস্টের পাজমানি পিটার বিশ্ববিদ্যালয়ে ভর্তি হন এবং মাত্র ২১ বছর বয়সে পিএইচডি ডিগ্রি অর্জন করেন। ১৯৩৪ সালে পোস্ট ডক্টরাল ফেলোশিপ নিয়ে ম্যানচেস্টার যান এবং এরই ফাঁকে কেমব্রিজের বিশ্বখ্যাত গণিতবেত্তা হার্ডি ও উলামের সঙ্গে তাঁর বন্ধুত্ব হয় ১৯৩৪-৩৫ সালে। এরপর থেকে অধ্যাপক আরডসের আর কোনোদিন স্থায়ী বাসস্থান হয় নি। দীর্ঘ ষাট বছর একটি খিটখিটে সুটকেসে তাঁর পার্থিব সম্পত্তি নিয়ে এক গণিতবিদের বাড়ি থেকে অন্য গণিতবিদের বাড়িতে অনাহুত উপস্থিত হয়ে বলতেন, যে কোনো সমস্যা সমাধানের জন্য আমার মাথা প্রস্তুত। স্ত্রী সন্তান, শখ, বাড়ি কিছুই ছিল না। বেল ল্যাবের ড. রন গ্রাহামের বাড়িতে অধ্যাপক আরডসের জন্য একটি কক্ষ নির্দিষ্ট ছিল। প্রতি বছর প্রায় ৭০টি বিশ্ববিদ্যালয়ে বেড়ানোর ফাঁকে ফাঁকে এখানে আসতেন বিশ্রাম নেওয়ার জন্য নয়, নতুন নতুন সমস্যা সমাধানের জন্য। দিনে ১৯ ঘণ্টা কাজ করতেন। বিশ্রাম নেওয়ার কথা বললেই বলতেন কবরে বিশ্রাম নেওয়ার অফুরন্ত সময় হবে।

১৯৯৬ সালের ২০ সেপ্টেম্বর ওয়ারশতে মৃত্যুর পূর্ব পর্যন্ত সমস্যা সমাধানের দিনপঞ্জিতে তার কোনো পরিবর্তন ছিল না। এবার এই বিদগ্ধ পণ্ডিতের কাজের কিছু পরিসংখ্যান দেখি।

পল আরডস জীবনে কোনো তত্ত্ব রচনার কিংবা প্রতিষ্ঠা করার জন্য কাজ করেন নি। কম্বিন্যাটরিকস, নাম্বার থিওরি ও গ্রাফ থিওরির বিভিন্ন চমৎকার সমস্যার ততোধিক চমৎকার ও সরল সমাধানই ছিল তাঁর জীবনের প্রধান আকর্ষণ। তাঁর কাজের ওপর ভিত্তি করেই কম্পিউটার বিজ্ঞানের অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বিষয় ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স সমৃদ্ধ হয়। মৃত্যুর আগ পর্যন্ত তাঁর ১ হাজার ২০০টিরও বেশি গবেষণা প্রবন্ধ প্রকাশিত হয়েছিল। গণিতের বিভিন্ন শাখায় অসংখ্য অবদানের জন্য ১৯৮৪ সালে তাঁকে উলফ পুরস্কার দেওয়া হয়। মৃত্যুর চার বছর পরও তাঁর লেখা গবেষণা প্রবন্ধ প্রকাশিত হচ্ছে। বিগত ৩১ জানুয়ারি ২০০১ সালের তথ্যানুযায়ী তাঁর প্রকাশনার সংখ্যা ১ হাজার ৫০৭। ১৯৯৭ সালে এই সংখ্যা ছিল ১ হাজার ৪০০। গণিতের বিভিন্ন শাখায় ৫০০-এর বেশি গবেষণা প্রবন্ধ লিখেছেন— একরকম গবেষক রয়েছেন ৮ জন। বাইনভ (৭৮২), লিউনার্দ কার্লিস (৭৩০), লুসি গভো (৬৪৪), সাহারন কোলাহ (৬০০), হরি শ্রীভাস্টভ (৫৩৭), ফ্রাঙ্ক হারারি (৫৩৪), রিচার্ড বেলম্যান (৫২২)। এই তথ্যগুলো আমেরিকান ম্যাথমেটিক্যাল সোসাইটির ম্যাথমেটিক্যাল রিভিউ থেকে নেওয়া। বিখ্যাত লিউনার্দ অয়লার বার্লিনে তাঁর ২৫ বছরের জীবনে (১৭৪১-১৭৬৬) ৩৮০টি প্রবন্ধ লিখেছিলেন। ১৭৭১ সালে সম্পূর্ণভাবে অন্ধ হয়ে যাওয়ার পর তাঁর দুই ছেলের সহযোগিতায় জীবনের প্রায় অর্ধেক গবেষণা প্রবন্ধ লিখেছিলেন। সেই হিসেবে অয়লারের প্রবন্ধ

সংখ্যাও ৬০০ ছাড়িয়ে যাবে। এছাড়া সদ্য প্রয়াত কার্নেগি মেলনের যশস্বী অধ্যাপক হার্বার্ট সাইমনের গবেষণা প্রবন্ধের সংখ্যাও এক হাজারের কাছাকাছি হবে। ভাবতে অবাক লাগে অধ্যাপক আরডসের গবেষণা সহযোগীর সংখ্যা ছিল ৫০৭। যাদের সঙ্গে তিনি কমপক্ষে একটি করে প্রবন্ধ লিখেছেন। এ নিয়ে গণিতবিদদের মধ্যে এত কৌতূহল যে, 'আরডস নাম্বার' নামের একটি ধারণা সংযোজিত হয়েছে। পল আরডসের 'আরডস নাম্বার' শূন্য। যারা পল আরডসের সঙ্গে প্রবন্ধ লিখেছেন তাদের 'আরডস নাম্বার' এক। এভাবে কেউ যদি আরডস নাম্বার ৩-এর অধিকারী কোনো গবেষকের সঙ্গে প্রবন্ধ লিখে থাকেন তাঁর আরডস নাম্বার হবে ৪। এ সংক্রান্ত বিস্তারিত তথ্য http ://www.oakland.edu/ ~grossman /erdoshp. এই ওয়েব অ্যাড্রেসে পাওয়া যাবে। অপ্রত্যাশিতভাবে আমারও একটি আরডস নাম্বার রয়েছে। জর্জ জেকেরেস পল আরডসের সঙ্গে ৫টি প্রবন্ধ লিখেছেন। আমার থিসিস সুপারভাইজার ড. সলজবর্ন জর্জ জেকেরেসের সঙ্গে একটি প্রবন্ধ লিখেছেন। ড. সলজবর্নের সঙ্গে আমার গবেষণা প্রবন্ধ রয়েছে। ফলে আমার আরডস নাম্বার হলো ৩। কোনো একজন গণিতবিদের সহযোগী গবেষকের সঙ্গে একটি প্রকাশিত প্রবন্ধ থাকলেই তাঁর আরডস নাম্বার থাকবে তার সম্ভাবনা অনেক বেশি।

গণিত ছাড়া অন্য বিষয়ের গবেষকদেরও আরডস নাম্বার রয়েছে। যেমন গ্লাসো ও আইনস্টাইনের আরডস নাম্বার ২। তাহলে সত্যেন বোসের ৩ হবে। মাক্সবর্ন, সালাম, রামসে ও ফার্মির আরডস নাম্বার ৩। এরকম ৪০ জন পদার্থবিজ্ঞানে নোবেল বিজয়ীর আরডস নাম্বার ৭-এর বেশি নয়। এমনিভাবে ১৩ জন অর্থনীতিতে, ১৩ জন রসায়নশাস্ত্রে ও ৩ জন চিকিৎসাবিজ্ঞানের নোবেল বিজয়ীর আরডস নাম্বার রয়েছে। গণিত শাস্ত্রের অত্যন্ত নামকরা ফিল্ডস মেডাল পুরস্কারপ্রাপ্ত ৩৫ জনের আরডস নাম্বার রয়েছে যাদের দু'জন আরডসের সহ-গবেষক। এছাড়া ৬২ জন স্টিল পুরস্কারপ্রাপ্তেরও আরডস নাম্বার রয়েছে। ৩৯ জন উলফ পুরস্কারপ্রাপ্তেরও আরডস নাম্বার ৬-এর কম।

পল আরডস নিজে শুধু সমস্যা সমাধানই করেন নি, অন্যান্য গবেষকদেরও উৎসাহিত করেছেন। পল আরডস ভবিষ্যৎ গণিতবেত্তাদের জন্য অত্যন্ত প্রাচুর্যপূর্ণ সমস্যার ভাণ্ডার দিয়ে গেছেন। পল আরডস সারাবিশ্বে সহগবেষক তৈরি করেছেন। বিভিন্ন স্তরের গবেষকদের সঙ্গে আরডস নাম্বার দিয়ে তাঁর সঙ্গে একটি আত্মীয়তা তৈরি হয়েছে। সাড়ে তিনশত বছরের পুরনো ফার্মার থিউরেম প্রমাণকারী অ্যান্ড্রু ওয়াইলসের আরডস নাম্বার ৩। বিল গেটসের আরডস নাম্বার ৪।

এখানে ম্যাথমেটিক্যাল রিভিউয়ের ডাটাবেজ থেকে কিছু তথ্য উপস্থাপন করছি। এই ডাটাবেজের ষোল লাখ প্রবন্ধ লিখেছেন তিন লাখ সাঁইত্রিশ হাজার গবেষক। ৬৫.৮%, ২৫.৪%, ৬.৭%, ১.৩%, .৩% ও .১% প্রবন্ধ যথাক্রমে

একজন, দু'জন, তিনজন, চারজন, পাঁচজন কিংবা ৬ অথবা বেশি সংখ্যক সহ-গবেষকের লেখা। বর্তমানে অবশ্য একমাত্র লেখকের অনুপাত কমে ৫০-এর নিচে এসেছে। প্রতি প্রবন্ধের গবেষকের গড় সংখ্যা ১.৪৫, গবেষক প্রতি প্রবন্ধের গড় সংখ্যা ৬.৮৭। এই সংখ্যার মধ্যক ২ এবং গড় বিচ্যুতি ১৫.৩৫। এর মধ্যে ৪২ শতাংশ গবেষকের মাত্র একটি করে প্রবন্ধ রয়েছে, ৬০ শতাংশের অনূর্ধ্ব ৩, ৭০ শতাংশের অনূর্ধ্ব ৪, ৮০ শতাংশের অনূর্ধ্ব ৮, ৯০ শতাংশের অনূর্ধ্ব ১৭ এবং ৯৫ শতাংশের অনূর্ধ্ব ৩০। ৩ জন গণিতবিদের ২৮০ অথবা তারও বেশি সহ-গবেষক আছে। তাঁরা হলেন পল আরডস (৫০৭), ফ্রাংক হারারি (২৫৪) ও মিট্রোপলস্কি (২৮০)।

সমস্যা সমাধান করা ছাড়া অন্য কোনো বিষয়ে অধ্যাপক আরডসের বিন্দুমাত্র আগ্রহ ছিল না। এর জরিমানাও তাঁকে দিতে হয়েছে। একবার আমেরিকায় ঢোকার সময় ইমিগ্রেশনের প্রশ্নের সন্তোষজনক উত্তর দিতে না পারায় তাঁকে ফিরে যেতে হয়েছিল। যেহেতু তাঁর বাড়িঘর ছিল না। ইসরায়েলে তাঁকে বছর দশেক আশ্রয় নিতে হয়েছিল। জীবদ্দশায় প্রকাশিত ১ হাজার ২০০টি প্রবন্ধের প্রত্যেকটির ফলাফল তিনি অনর্গল বলে যেতে পারতেন। তাঁর সমস্যা সমাধানের দক্ষতা ও দ্রুততাকে কাজে লাগিয়ে অনেক গবেষকই সফলতা পেয়েছেন। অধ্যাপক আরডস যে কনফারেন্স বা সেমিনারেই উপস্থিত থাকতেন তাঁর পাশের সিটটির প্রতি সবারই আকর্ষণ থাকত। সাধারণত পাশে বসে অধ্যাপক আরডসকে একটি সমস্যা দিলে চোখ বন্ধ করে মিনিট দেড়েক ঝিমিয়ে কোনো না কোনো বুদ্ধি দিয়ে দিতেন। শোনা যায় যুক্তরাজ্যে অবস্থানকালীন একটি ট্রেনে এক কন্ট্রাক্টরের সঙ্গে পাশাপাশি বসে ভ্রমণ করছিলেন। সেই কন্ট্রাক্টরের সঙ্গেও তাঁর একটি প্রবন্ধ রয়েছে।

আজীবন অকৃতদার এই বিস্ময়কর গণিতবিদ যাযাবর জীবনে তাঁর মাকে নিয়ে এক দেশ থেকে অন্য দেশে ঘুরে বেড়িয়েছেন।

পার্থিব কোনো সম্পদ, বিষয়, আনন্দ তাঁকে স্পর্শ করতে পারে নি। তাঁর সহজ-সরল জীবনে ভোগের কোনো স্থান ছিল না। কাজ আর কাজ নিয়েই তাঁর দিন শুরু ও শেষ হতো। গণিতের সৌন্দর্যই তাঁর একমাত্র উপভোগের বিষয় ছিল। তাঁর কাজ ও জীবন নিয়ে অনেক বই ও ডকুমেন্টারি তৈরি হয়েছে।

পল আরডস ভবিষ্যতের গণিতবিদদের জন্য দীর্ঘদিন অনুপ্রেরণার উৎস হয়ে বেঁচে থাকবেন।

কাল্পনিক (!) সংখ্যা

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

মনে করা যাক তোমাকে বলা হলো 8 কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন সেই দু'টি অংশ দিয়ে একটি অপরটিকে গুণ করলে আমরা 24 পাই। 8 এমন কিছু বড় সংখ্যা নয় কাজেই আমরা সোজাসুজি দুই অংশে ভাগ করে চেষ্টা করে দেখতে পারি :

$8 = 1 + 7$ গুণ করলে পাই $1 \times 7 = 7$

ঠিক সেরকম

$8 = 2 + 6 \quad 2 \times 6 = 12$

$8 = 3 + 5 \quad 3 \times 5 = 15$

$8 = 4 + 4 \quad 4 \times 4 = 16$

দেখাই যাচ্ছে গুণ করে 16 থেকে বেশি পাওয়া সম্ভব নয়। আমরা যদি $8 = 1.5 + 6.5$ বা $8 = 4.3 + 3.7$ দিয়ে চেষ্টা করতাম তাহলেও হতো না, 16 থেকে বেশি পাওয়া যেতো না।

কিন্তু আসলেই কী তাই ?

মনে করা যাক আমরা 8 কে $4 + x$ এবং $4 - x$ এই দুই অংশে ভাগ করি যেন

$(4 + x) + (4 - x) = 8$

$(4 + x) \times (4 - x) = 24$

এবারে দ্বিতীয় সমীকরণটি লিখি

$4^2 - x^2 = 24$

কিংবা $x^2 = 16 - 24$

$x^2 = -8$

$x = \sqrt{-8}$

কাজেই 8-কে আমরা যদি $4 + \sqrt{-8}$ এবং $4 - \sqrt{-8}$ এই দুটি সংখ্যায় ভাগ করি তাহলে যোগ করলে হয়

$\left(4 + \sqrt{-8}\right) + \left(4 - \sqrt{-8}\right) = 8$ এবং গুণ করলে হয়

$\left(4 + \sqrt{-8}\right)\left(4 - \sqrt{-8}\right) = 16 - \left(\sqrt{-8}\right)^2 = 16 - (-8) = 24$

ঠিক আমরা যেটা চেয়েছিলাম।

আমি নিশ্চিত তোমরা ভুরু কুঁচকে বলছ, এটা আবার কী রকম অঙ্ক ? সারা জীবন শুনে এসেছি মাইনাসে মাইনাসে প্লাস অর্থাৎ,

$4\times4 = 16$

$(-4)\times(-4) = 16$

কাজেই একটা সংখ্যার বর্গ নিলে সেটা পজিটিভ হোক আর নেগেটিভ হোক সংখ্যাটির বর্গ সব সময় পজিটিভ। একটা সংখ্যা যদি সবসময় পজিটিভ হয় তাহলে সেটাকে নেগেটিভও ধরে বর্গমূল কেমন করে নেব ? কেন নেব ? ব্যাপারটা অনেকটা 'চিরকুমারের স্ত্রী' বা 'নিঃসন্তানের ছেলের' মতো। যে মানুষটি বিয়ে করে নি সে হচ্ছে চিরকুমার– তার স্ত্রী হয় কেমন করে ? যার ছেলে মেয়ে নেই সে নিঃসন্তান, তার ছেলে কেমন করে পাব ? যে সংখ্যাটি পজিটিভ তার নেগেটিভ হয় কেমন করে ?

কাজেই খুব যুক্তিসঙ্গত কারণেই ষোড়শ শতাব্দীর গণিতবিদরা (যেমন Gerolamo Cardana) প্রথমে এই ধরনের ব্যাপারটি লক্ষ করলেও এটাকে বেশি গুরুত্ব দেন নি। বলেছেন ব্যাপারটা অতিসূক্ষ্ম (Subtle), গোলমেলে (Puzzling) এবং অবশ্যি গুরুত্বহীন (Useless)!

কিন্তু দেখা গেল এই অতিসূক্ষ্ম, গোলমেলে এবং গুরুত্বহীন জিনিসটাও কিছু গুরুত্বপূর্ণ কাজে লাগে। যেমন ধরা যাক $ax^2 + bx + c = 0$ জাতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যাপারটি যারা একটু উপরের ক্লাশে উঠেছে তারাই এর সমাধান বের করতে পারে। কিন্তু ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান কীভাবে বের করা যায় ? যে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণকে আসলে $X^2 = A$ এই রূপে লেখা যায়। যেমন

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ধরা যাক $x = X - \frac{b}{2a}$

$$\therefore \left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$X^2 - \frac{b}{a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}X - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$X^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$A = \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$ লিখলে

আমাদের সমীকরণটি আমরা পেয়ে গেলাম $X^2 = A$

ঠিক সেরকম যে কোনো ত্রিঘাত সমীকরণ $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$–কে আরো সহজ রূপে : $x^3 + mx = n$ লেখা যায়।

এই ত্রিঘাত সমীকরণের (cubic equation) প্রথম সমাধান বের করেছিলেন Tartagalia, সমাধানটি কাউকে জানাবেন না এরকম প্রতিশ্রুতি নিয়ে তিনি সেটা জানিয়েছিলেন cardan-কে, Cardan তার প্রতিশ্রুতি ভেঙ্গে ১৫৪৫ সালে Ars Magna বইয়ে প্রকাশ করে দিলেন– সেই থেকে অনেকে এটাকে বলে Cardan's Solution। কী দুঃখের ব্যাপার!

যাই হোক ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধানটি হচ্ছে এরকম—

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + A} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + A}$$

যেখানে $A = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}$

সমাধানটি সত্যিই কাজ করে কী না সেটা পরীক্ষা করে দেখা যাক। মনে করি সমীকরণটি হচ্ছে :

$x^3 + 24x = 56$

কাজেই $A = \sqrt{\frac{56^2}{4} + \frac{24^3}{27}} = \sqrt{784 + 512} = \sqrt{1296} = 36$

কাজেই $x = \sqrt[3]{\frac{56}{2} + 36} - \sqrt[3]{-\frac{56}{2} + 36}$

$= \sqrt[3]{28 + 36} - \sqrt[3]{-28 + 36}$

$= \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}$

$= 4-2=2$

তোমরা ইচ্ছা করলে প্রকৃত সমীকরণটিতে $x = 2$ বসিয়ে দেখতে পার $2^3 + 24 \times 2 = 8 + 48 = 56$, আমরা সত্যি সমাধানটিই বের করেছি।

দ্বিঘাত সমীকরণের যেরকম দু'টি সমাধান থাকে ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান নিশ্চয়ই তিনটি তাহলে অন্য দু'টো সমাধান কেমন করে বের করব ? খুব সহজ– আমরা যেহেতু $(x-2)$ একটা উৎপাদক বের করে ফেলেছি এখন বাকি সমীকরণটিকে দ্বিঘাত সমীকরণ হিসেবে লেখা যায়–

$$x^3 + 24x - 56 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 28x - 56 = 0$$

$$x^2(x-2) + 2x(x-2) + 28(x-2) = 0$$
$$(x-2)(x^2 + 2x + 28) = 0$$

কাজেই $x^2 + 2x + 28 = 0$ এটি সমাধান করে বাকি দু'টো সমাধান পেয়ে যেতে পারি।

এবারে আমরা আবার আমাদের $x^3 + mx = n$ ধরনের ত্রিঘাত সমীকরণে ফিরে যাই, ধরা যাক আমাদের সমীকরণটি হচ্ছে

$$x^3 - 78x = 220$$

আগের মতো কাজ শুরু করতেই আমরা কিন্তু বিপদে পড়ে যাই। কারণ,

$$A = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} = \sqrt{\frac{220^2}{4} - \frac{(-78)^3}{27}} = \sqrt{-5476}$$

আবার আমরা নেগেটিভ সংখ্যার বর্গমূলে হাজির হয়েছি। এখন আমরা কী করব ? হাল ছেড়ে দেব ?

কিন্তু হাল ছেড়ে দিই কেমন করে, কারণ আমরা জানি $x = 10$ হচ্ছে এই সমীকরণের একটা সামধান। বিশ্বাস না করলে পরীক্ষা করে দেখ—

$$x^3 - 78x = 10^3 - 78 \times 10 = 1000 - 780 = 220\,!$$

নেগেটিভ সংখ্যার বর্গমূল (নিঃসন্তানের পুত্র!) দেখেও কিন্তু rafael Bombelli নামের একজন গণিতবিদ ছেড়ে দিলেন না তিনি $\sqrt{-5476}$-কে লিখলেন $74\sqrt{-1}$ এবং শেষ পর্যন্ত হিসেব করে গেলেন। আমরা সেই হিসেবে না গিয়ে শুধু মাত্র শেষ লাইনটা লিখি—

$$x = \left(5 + \sqrt{-1}\right) - \left(-5 + \sqrt{-1}\right) = 5 + \sqrt{-1} + 5 - \sqrt{-1} = 10$$

ঠিক যেটা হওয়া উচিৎ! $\sqrt{-1}$ কাটাকাটি হয়ে দূর হয়ে গিয়েছে– আমরা ঠিক সমাধানটা পেয়ে গেছি। কিন্তু $\sqrt{-1}$-কে ব্যবহার করতে হয়েছে এটাকে ব্যবহার না করে আমরা সমাধানটি পেতে পারি নি। Bombelli কিন্তু তারপরেও বললেন এটা মোটামুটি পাগলামো, (Wild Thought), সত্যি কিছু নয় বরং কুতর্ক (Sophistry rather than truth!).

আরো অনেক বৎসর পার হয়ে গেল। বড় বড় গণিতবিদরা এই সংখ্যাগুলোকে আরো অপমান করলেন, দেকার্তে (Descartes) $\sqrt{-9}$ জাতীয় সংখ্যাগুলোকে বললেন কাল্পনিক (imaginary). কাল্পনিক কোনো কিছুকে কেউ গুরুত্ব দিয়ে নেয় না। পক্ষিরাজ ঘোড়া বা পরী রূপকথার বইয়ের বাইরে আসতে পারে না। কাজেই কাল্পনিক বা ইমাজিনারি সংখ্যার কখনো রূপ কথার জগৎ

থেকে বের হয়ে আসার কথা নেই। বিজ্ঞানী নিউটনও এই সংখ্যাগুলোকে বললেন অসম্ভব (impossible)।

অয়লার (Euler) এর একজন মহাগণিতবিদ প্রথমে এই সংখ্যাগুলোকে গুরুত্ব দিয়ে দেখলেন, তিনি $\sqrt{-1}$-কে লিখলেন i এবং এই সংখ্যাগুলোকে বললেন কমপ্লেক্স নাম্বার যার ভেতরে সত্যিকার (real) এবং কাল্পনিক (imaginary) অংশ আছে, $z = a + bi$ যেমন $3 + 4i$ বা $2-7i$। কমপ্লেক্স নাম্বারের a কিংবা b দুটিই শূন্য হতে পারে b যদি শূন্য হয় তাহলে সেটি আমাদের পরিচিত রিয়েল সংখ্যা, a যদি শূন্য হয় তাহলে সেটি ইমাজিনারি সংখ্যা, কোনোটাই যদি শূন্য না হয় তাহলে সেটা হলো কমপ্লেক্স সংখ্যা।

কেউ যেন মনে না করে অয়লার শুধুমাত্র কমপ্লেক্স নাম্বার কীভাবে লিখতে হয় তার একটা নিয়ম তৈরি করে দিয়েছেন তিনি এই পুরো ব্যাপারটির সত্যিকার গুরুত্বটি সবাইকে চোখে আঙুল দিয়ে দেখালেন। তিনি বললেন সব কমপ্লেক্স নাম্বারের দুইটি বর্গমূল (Square root) তিনটি ঘন মূল (cube root), চারটি চতুর্থ মূল (Quart root) থাকে! যেমন 4-এর বর্গমূল 2 এবং -2, সবাই জানে। 8-এর একটা ঘনমূল 2 কারণ $2 \times 2 \times 2 = 8$ কিন্তু অয়লার বলেছেন এর তিনটা ঘনমূল থাকতে হবে। বাকি দুটো তাহলে কী ? কমপ্লেক্স নাম্বার দিয়ে হিসেব নিকেস করা জানলে দেখবে সে দু'টি হচ্ছে–

$$-1 + \sqrt{3}i \text{ এবং } -1 - \sqrt{3}i$$

যারা চোখ কপালে তুলে এই বিচিত্র সংখ্যাটির দিকে তাকিয়ে আছ তারা ইচ্ছে করলে পরীক্ষা করে দেখতে পার!

$$\left(-1 + \sqrt{3}i\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$
$$= \left(1 - 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$
$$= \left(1 - 2\sqrt{3}\,i - 3\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)$$
$$= \left(-2 - 2\sqrt{3}i\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$
$$= -2\left(1 + \sqrt{3}i\right) \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$
$$= 2\left(1 + \sqrt{3}i\right) \times \left(1 - \sqrt{3}i\right)$$
$$= 2(1 - 3i^2)$$
$$= 2(1 + 3)$$
$$= 2 \times 4$$
$$= 8\,!$$

একেবারে সোজা অঙ্ক, শুধুমাত্র মাঝে মাঝে $i^2 = -1$ লিখেছি।

অয়লার সবচেয়ে বড় যে ব্যাপারটি করেছেন সেটা হচ্ছে এই ধরনের একটি অত্যন্ত নিরীহ সমীকরণ লেখা

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

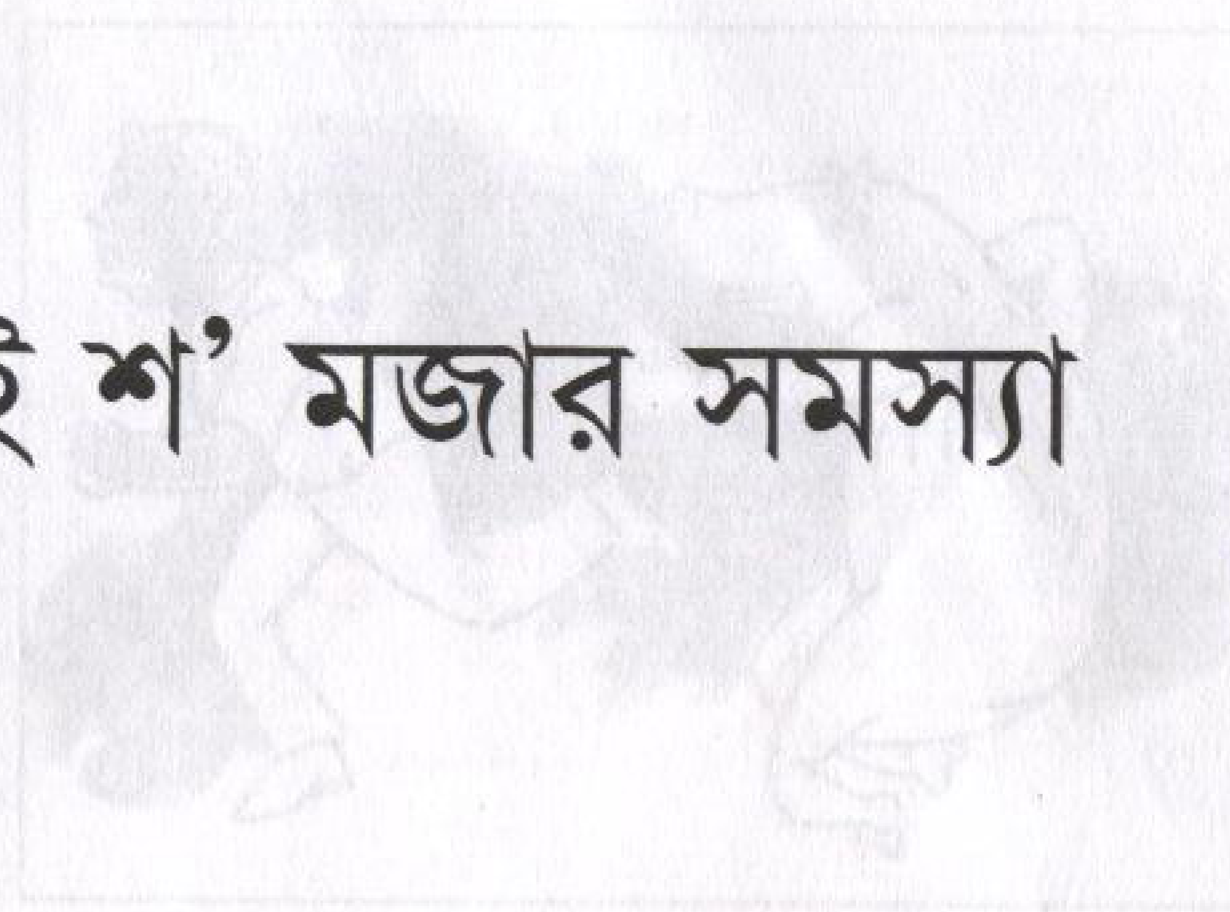
গণিতের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ সংখ্যা বা রাশিগুলো হচ্ছে 0, 1, e এবং π তিনি এই সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ চারটি জিনিসকে একটি নিরীহ ধরনের সমীকরণের মাঝে নিয়ে এসেছেন এবং সেটি করার জন্যে সবচেয়ে রহস্যময় যে সংখ্যা $\sqrt{-1}$ সেটিকে ব্যবহার করেছেন। এই নিরীহ কিন্তু অসম্ভব গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণটির অনেক সুদূর প্রসারী প্রভাব পড়েছে। আমরা আজ কমপ্লেক্স নাম্বার ব্যবহার করে যে অপূর্ব ইমারত গড়ে তুলেছি তার অনেক কিছুই এর মাঝে লুকিয়ে আছে।

অয়লার কমপ্লেক্স নাম্বারকে জনপ্রিয় করেছিলেন, কেমন করে তার বহুমাত্রিক বর্গ বা বর্গমূল নিতে হয় দেখিয়েছেন, কেমন করে উৎপাদক বা মূল বের করতে হয় সেটা দেখিয়েছেন, কমপ্লেক্স নাম্বার নিয়ে এলজেবরা করা দেখিয়েছেন। এরপর আরো বড় বড় গণিতবিদরা এই কমপ্লেক্স নাম্বার নিয়ে কাজ করেছেন। এর উপরে গাউসের কিছু যুগান্তকারী সূত্র রয়েছে। কমপ্লেক্স ফাংশন নিয়ে কশি (Cauchy), রাইমান (Reiman)-এর অভূতপূর্ব কাজ রয়েছে।

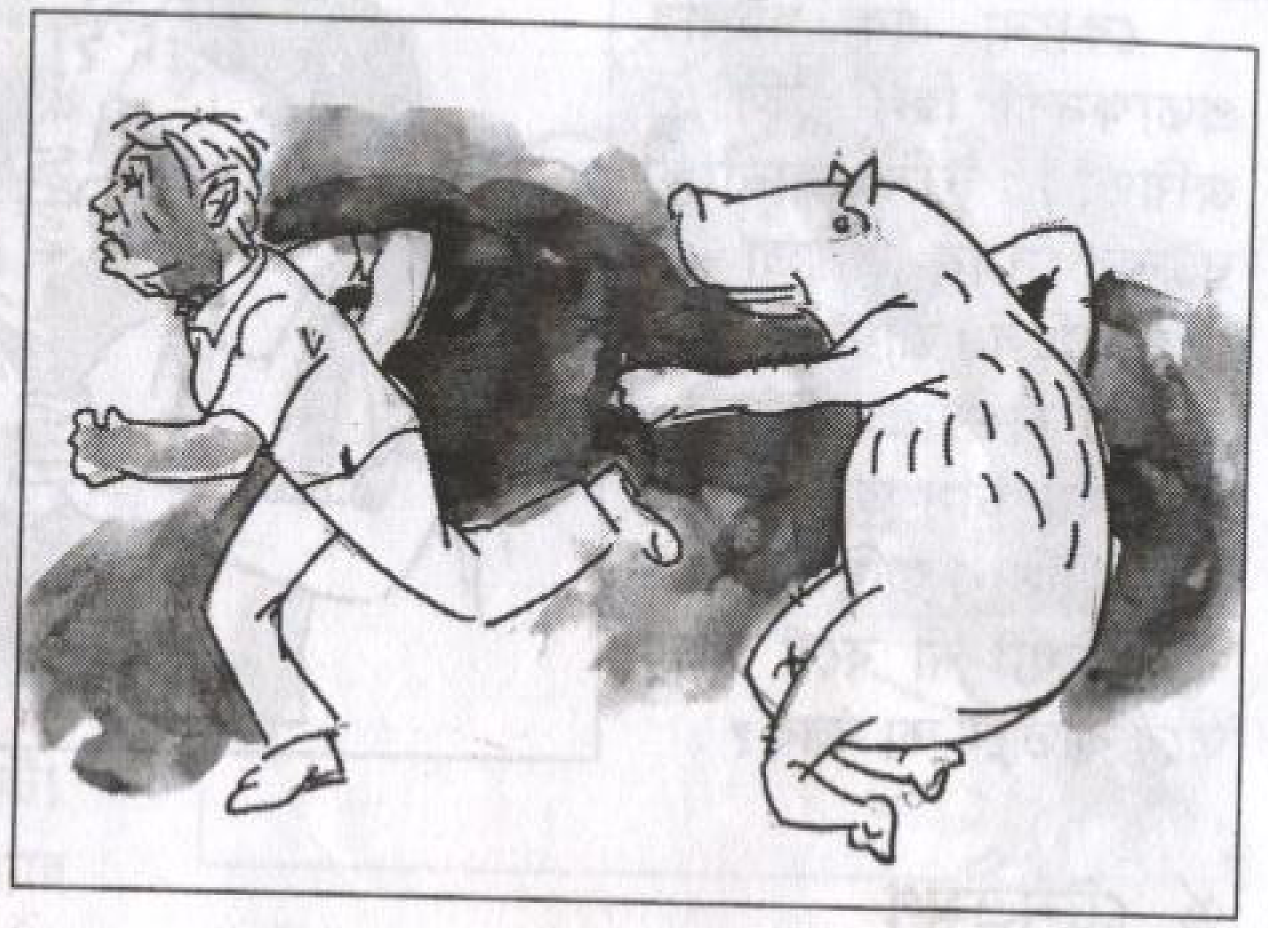
এককালের গোলমেলে এবং গুরুত্বহীন কাল্পনিক সংখ্যা এখন এমন একটি পর্যায়ে পৌঁছেছে যে কোনো পদার্থবিজ্ঞানী বা ইঞ্জিনিয়ার, বিজ্ঞান কিংবা প্রযুক্তি শেখার আগে এই কমপ্লেক্স নাম্বারটি ব্যবহার করা শিখে নেয়। এটি এখন এত নিত্যব্যবহার্য হয়ে গেছে যে ভালো একটি ক্যালকুলেটর কিনলে তার মাঝে কমপ্লেক্স নাম্বার নিয়ে অঙ্ক করার ব্যবস্থা করে দেয়া থাকে।

আমরা এখনো দেখি নি কিংবা অপ্রয়োজনীয় বলে তুচ্ছ তাচ্ছিল্য করছি এমন কিছু কী আমাদের চমকে দেয়ার জন্যে অপেক্ষা করছে?

দুই শ' মজার সমস্যা



১. ভালুক



একজন লোক তার বাড়ি থেকে উত্তর দিকে 10 মাইল গিয়ে একটা ভালুকের মুখে পড়ল, অনেক কষ্টে ভালুকের কবল থেকে মুক্তি পেল। প্রথমে 10 মাইল দক্ষিণ দিকে তারপর আবার পূর্বদিকে 10 মাইল গিয়ে তার বাড়িতে ফিরে এলো। ভালুকের গায়ের রঙ কী? কেন?

২. আনন্দ-মিছিল

পরিবেশ দূষণ রোধ করার জন্য সম্প্রতি নীলমনিরহাট শহরে বাইসাইকেল ও রিকশা ছাড়া সব যানবাহন নিষিদ্ধ করা হয়েছে। এই উপলক্ষে এক আনন্দ মিছিলে প্রতি বাইসাইকেল ও রিকশায় চালকসহ দু'জন করে মানুষ আরোহণ করেছে। নীলমনিরহাট শহরের জনসংখ্যা 3 হাজার আর বাইসাইকেল ও রিকশার মোট চাকার সংখ্যা 3 হাজার 800। শহরে বাইসাইকেল ও রিকশার সংখ্যা কত?

৩. পাথর-ভাঙা

একটি 40 কেজি ওজনের পাথরকে সবচেয়ে কম কয় ভাগে এবং কী কী ভাগে ভাগ করলে 1 থেকে 40 পর্যন্ত যে কোনো ওজন তৈরি করা যাবে? (পাথর দাঁড়িপাল্লার উভয় দিকে বসানো যাবে?)

৪. বাবা ও ছেলে

১৯৯৮ সালে রহিম সাহেবের বয়স ছিল তার জন্ম সালের শেষ দুটি অঙ্কের সমান। ব্যাপারটি আবিষ্কার করে রহিম সাহেব তার বাবাকে জানাতেই তার বাবা বললেন, এই কথাটি তার নিজের বেলায়ও সত্য। রহিম সাহেবের বাবার বয়স কত?

৫. সাক্ষ্য প্রমাণ

কোনো এক ঘটনার প্রত্যক্ষদর্শী ছিল টুসি ও জয়িতা। টুসি জানালো ঘটনার সময় জয়িতা ওর পেছনে ছিল। জয়িতার কাছে জানতে চাওয়ায় সে বলল– সে সময় টুসি তার পেছনে ছিল। টুসি ও জয়িতার কেউ যদি মিথ্যা না বলে থাকে তবে কীভাবে তা সম্ভব ?

৬. ট্রেনভ্রমণ

ট্রেনে ভ্রমণের শখ হওয়ায় সম্প্রতি জয়িতা ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম গেল সুবর্ণ এক্সপ্রেসে করে। ধরা যাক, সুবর্ণ এক্সপ্রেস ঢাকা এবং চট্টগ্রাম থেকে প্রতি ঘণ্টায় ঘণ্টায় ছাড়ে। উভয়মুখী ট্রেনের গতিবেগ একই এবং প্রত্যেকটি ট্রেন ঠিক পাঁচ ঘণ্টা পর গন্তব্যে পৌছে। বলতে হবে, ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম পৌছতে জয়িতা কয়টি বিপরীত মুখী ট্রেন দেখবে ?

৭. জন্মদিনের কেক

রফিকের বয়স 19 হলো। তার জন্মদিনের কেকে 19টি মোমবাতি 9টি সারিতে এমনভাবে সাজাতে হবে যেন প্রতি সারিতে সমান সংখ্যক মোমবাতি থাকে। সর্বোচ্চ কতটি করে মোমবাতি প্রতি সারিতে থাকবে?

৮. এক সমান দুই ?

a = b হলে আমরা লিখতে পারি

$a^2 = ab$

বা, $a^2 - b^2 = a^2 - ab$

বা, $(a + b)(a - b) = a(a - b)$

বা, $a + b = a$

কাজেই $2a = a$, বা $2 = 1$।

অর্থাৎ কারো কাছ থেকে তুমি দুই টাকা ধার নিয়ে এক টাকা ফেরৎ দিলেই হবে। ওপরের যুক্তিতে কী ভুল আছে ? থাকলে সেটি কোথায় ?

৯. সংখ্যার মারপ্যাঁচ

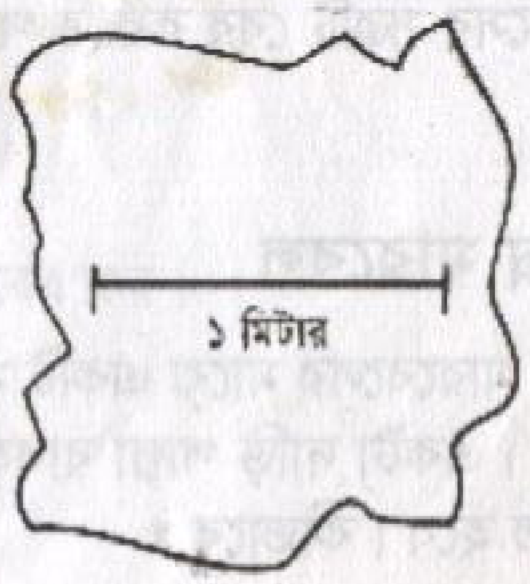
উৎস সারা দিন তার মামা টিটোকে বিরক্ত করে কম্পিউটার গেম খেলা নিয়ে। একদিন তার মামা তাকে এক শর্তে গেম খেলতে দিতে রাজি হলেন। তা হচ্ছে তাকে একটা ছোট সমস্যার সমাধান করতে হবে। সমস্যাটি হচ্ছে উৎসকে 24 সংখ্যাটি তৈরি করতে হবে 1,3,4 এবং 6 অঙ্কগুলোকে কেবল একবার করে ব্যবহার করে। এ কাজে সে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ এবং বন্ধনী ব্যবহার করতে পারে। আদরের ভাগনে উৎসের কষ্ট কমাতে মামা তাকে একটি উদাহরণও দিয়েছে। যেমন, 23 সংখ্যাটি পেতে হলে উত্তর হবে $(6 - 1)4 + 3$। তুমি কি তাকে সাহায্য করতে পার ? কীভাবে।

১০. প্রাইমের রহস্য

একটি সংখ্যা মৌলিক (Prime) হবে যদি সে সংখ্যাটি কেবল 1 আর সেই সংখ্যা দ্বারাই নিঃশেষে বিভাজ্য হয়। প্রমাণ করতে হবে যে কোনো মৌলিক সংখ্যাকে দু'টি পূর্ণসংখ্যার বর্গের বিয়োগফল হিসেবে প্রকাশ করা যাবে।

১১. ক্ষেত্রফল

পাশের ক্ষেত্রটির আয়তন কত ?
সঠিক উত্তরের ± 5% হলেই চলবে।



১২. নিষ্ঠুরতা

প্রাচীনকালে অনেক ধরনের নিষ্ঠুরতা ছিল, কোনো রাজ্য দখল করে রাজ্যের সবাইকে গোল করে দাঁড়া করিয়ে একজনের মাথা কেটে পরের জনকে রেখে এর পরেরজনের মাথা কেটে ফেলা হতো। এভাবে ঘুরে ঘুরে এসে শেষ পর্যন্ত যে মানুষটি রয়ে যেত তাকে দয়া করে ছেড়ে দেয় হতো। ধরা যাক তুমি এরকম একটা নিষ্ঠুরতার মাঝে পড়েছ, সব মিলিয়ে মানুষ 1000 জন। প্রথম জন থেকে মাথা কাটা শুরু হয়েছে, কত নম্বর মানুষ হলে তুমি বেঁচে যাবে?

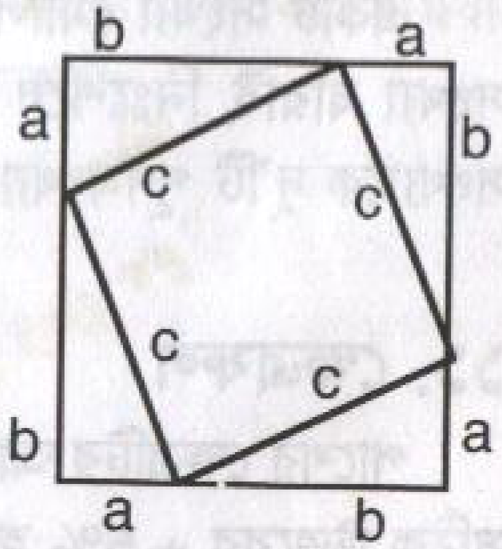
১৩. মজার অঙ্ক

$(x - a)\ (x - b)\ (x - c)\ \ldots\ \ldots\ (x - y)\ (x - z)$ সমান কত?

১৪. পিথাগোরাস

পিথাগোরাসের সূত্র হলো সমকোণী ত্রিভুজের বেলায় $a^2 + b^2 = c^2$.

পাশে দেখানো বড় বর্গক্ষেত্রের আয়তন ভেতরের ছোট বর্গ ক্ষেত্রের আয়তন এবং চারটি সমকোণী ত্রিভুজের আয়তনের সমান। এখান থেকে পিথাগোরাসের সূত্রটি বের করতে পারবে?



১৫. ভিন্ন মারবেল

12টি মারবেলের মাঝে একটি মারবেলের ওজন ভিন্ন– বেশি কিংবা কম ঠিক জানা নেই। একটা দাড়ি পাল্লা ব্যবহার করে তিনবার ওজন করে ভিন্ন মারবেলটি বের করতে হবে। কীভাবে?

১৬. মূল্যবান উপহার

এটি খুব মজার একটি সমস্যা, আমরা চাই সবাই এটা নিয়ে একটু ভাবনা চিন্তা করুক। তিনটি বাক্স— তার একটির মাঝে খুব মূল্যবান একটি উপহার, তুমি যদি ঠিকভাবে অনুমান করতে পার বাক্সটি কোনটি তাহলে তুমি উপহারটি পেয়ে যাবে। ধরা যাক তুমি একটি বাক্স অনুমান করলে সেটি ঠিক হতেও পারে নাও হতে পারে। এবারে অন্য বাক্স দুটি থেকে যদি একটা খালি বাক্স খুলে দেখানো হয় এবং তোমাকে যদি নতুন করে অনুমান করতে দেয়া হয় তুমি কী করবে— তুমি যেটি প্রথমে অনুমান করেছিলে সেখানেই থাকবে না কী অন্য বাক্সটি বেছে নেবে? কেন?

[সাহায্য : অন্য বাক্সটি বেছে নিলে পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা বেড়ে যাবে— বলো দেখি কেন?]

১৭. প্রাইমের মজা

যে সংখ্যাকে শুধুমাত্র সেই সংখ্যা এবং 1 দিয়ে ভাগ করা যায় তাকে মৌলিক (Prime) সংখ্যা বলে। মৌলিক সংখ্যা বের করার কোনো ফর্মুলা নেই তবে $x = 0$ দিয়ে শুরু করে $x^2 + x + 17$ ব্যবহার করে একসাথে বেশ কয়টি প্রাইম সংখ্যা বের করা যায়। সেই প্রাইম সংখ্যাগুলো কী কী?

১৮. বিচিত্র যোগ

এটি একটি যোগ অঙ্ক, অক্ষরগুলোর মান বের কর।

```
  FCF
+ FCB
-----
 BBJC
```

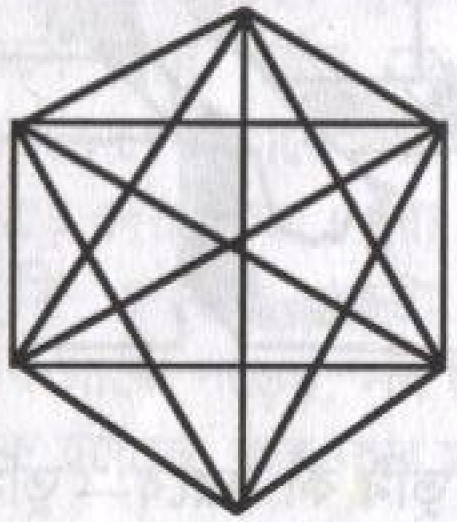
১৯. দশমিক বিন্দু কোথায় ?

নিচের যোগটিতে শুধুমাত্র একটা সংখ্যায় দশমিক বিন্দুটি ঠিক জায়গায় আছে। অন্যগুলোও ঠিক জায়গায় বসাও যেন যোগটি ঠিক হয়।

36.7
1874.5
109.6
14.8
383.11

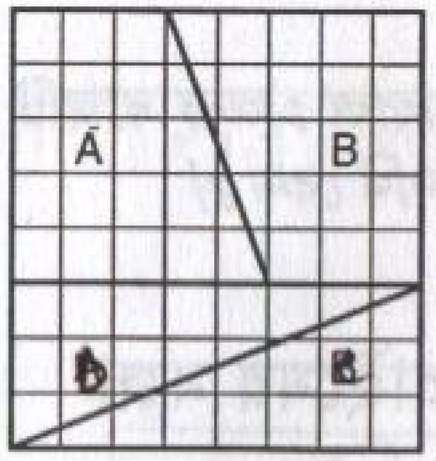
২০. কত ত্রিভুজ

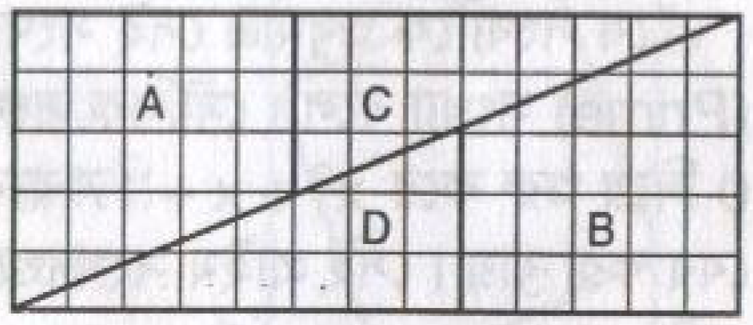
পাশের ছবিতে সব মিলিয়ে কয়টি ত্রিভুজ রয়েছে ?



২১. গোলমেলে বর্গক্ষেত্র

পাশের 8× 8 বর্গক্ষেত্রটি কেটে 13×5 আয়তক্ষেত্রটি তৈরি করা হয়েছে। কিন্তু মজার ব্যাপার হলো দুটোর ক্ষেত্রফল সমান নয়! বর্গক্ষেত্রের বেলায় 64 কিন্তু আয়তক্ষেত্রের বেলায় 65! সমস্যাটি কোথায় ?





২২. বল এবং বল

20 বাক্সের প্রত্যেকটাতে 20 করে বল। শুধুমাত্র একটা বাক্সের প্রত্যেকটা বলের ওজন 19 গ্রাম বাকি প্রত্যেকটা বাক্সের প্রত্যেকটা বলের ওজন 20 গ্রাম। একবার মাত্র ওজন করে বের করতে হবে কোন বাক্সের বলগুলোর ওজন 19 গ্রাম!

২৩. কোনো প্রাইম

x এবং y-এর কোন মানের জন্যে 2x + 3y এবং 9x + 5y সবচেয়ে বড় একটি মৌলিক সংখ্যা (প্রাইম) দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়। মৌলিক সংখ্যাটিই বা কী ?

২৪. ম্যাজিক বর্গ

ম্যাজিক বর্গ হচ্ছে বর্গাকারে সাজানো কিছু সংখ্যা যেটা ডানে বামে, উপরে নিচে বা কোণাকোণি যোগ করলে একই সংখ্যা পাওয়া যায়। পাশে 5×5 একটি ম্যাজিক বর্গ যার পাঁচটি সংখ্যা দেয়া নেই সংখ্যাগুলো বসিয়ে বর্গটি সম্পূর্ণ কর।

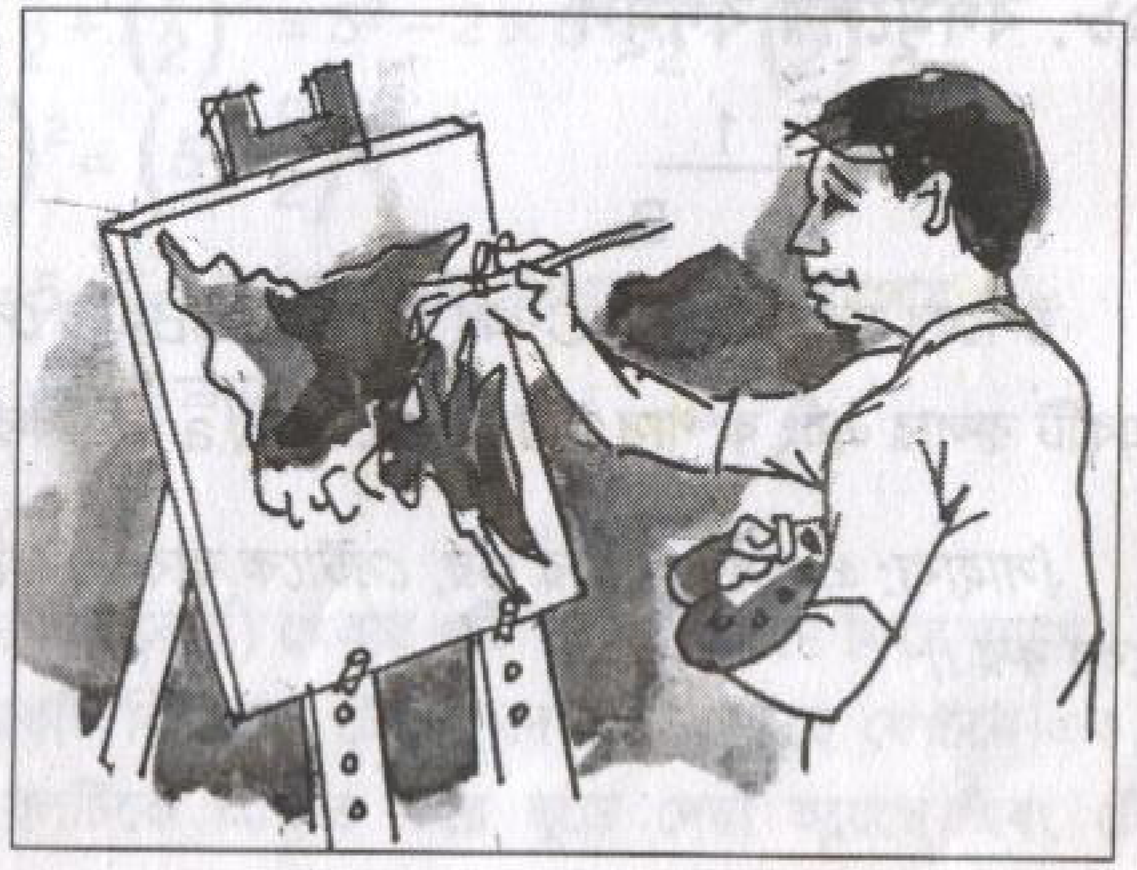
1	23	16		21
15		7	18	11
24	17		9	2
	8	19	12	6
5	3	10	22	

২৫. তুচ্ছ কম্পিউটার

তোমাদের ধারণা কম্পিউটার অনেক বড় বড় হিসেব করতে পারে যেটা তোমরা পার না। কিন্তু এই ভাগটি একটা ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার করতে পারবে না-কিন্তু তোমরা চেষ্টা করলে করতে পারবে। 3^{500}-কে 11 দিয়ে ভাগ করলে কি নিঃশেষে বিভাজ্য হবে ? যদি না হয় তাহলে ভাগশেষ কত ?

[সাহায্য : 3^{500}-কে লেখা যায় $(3^4)^{125} = 81^{125} = (77 + 4)^{125}$ এবারে চেষ্টা করে দেখ!]

২৬. ম্যাপের রঙ



গণিতের একটি সমস্যা গণিতবিদরা কয়েকশ বছর থেকে সমাধান করতে পারছিলেন না। সেটি হচ্ছে একটা ম্যাপে দেশগুলোকে আলাদা আলাদাভাবে চিহ্নিত করতে হলে সর্বোচ্চ কয়টি রঙ দরকার? কম্পিউটারের সাহায্য নিয়ে

মাত্র কিছুদিন আগে সেই সমস্যার সমাধান করা হয়েছে এবং দেখা গেছে সংখ্যাটি হচ্ছে চার। এই প্রথমবার কম্পিউটারকে গণিতবিদের সম্মান দিয়ে একটি বিখ্যাত সমস্যার সমাধান গ্রহণ করা হয়েছে। তোমরা ইচ্ছে করলে নিজেরাও কোনো একটি ম্যাপ নিয়ে ব্যাপারটি পরীক্ষা করে দেখতে পার।

আজকের সমস্যাটি করার জন্যে দরকার বাংলাদেশের একটি ম্যাপ, মোটামুটি বড় যেখানে 64টি জেলায় সবগুলোই নিখুঁতভাবে দেখানো হয়েছে। পাশাপাশি জেলাকে যেখানে দুটি জেলারই এক সীমানা আছে, ভিন্ন রঙ দিতে হবে (যেমন— নোয়াখালী ও কুমিল্লা) কিন্তু দুটি জেলা যদি মাত্র এক বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে (যেমন— নোয়াখালী ও চাঁদপুর) তাহলে ভিন্ন রঙ দেয়ার প্রয়োজন নেই। তোমরা যদি পাশাপাশি যে-কোনো চারটি জেলা নাও তাহলে দেখবে তিনটি রঙ দিয়েই তাদের রঙ করা সম্ভব। কিন্তু একটা জেলা আছে যেটি সহ পাশাপাশি চারটে জেলা নিলে চারটি রঙ ব্যবহার করতেই হবে। জেলাটি কোনটি?

২৭. মজার গুণ

8, 589, 934, 592 এবং 116, 415, 321, 826, 934, 814, 453, 125 এই সংখ্যা দুটির একটিতেও একটি শূন্যও নেই। দুটি সংখ্যা গুণ করলে গুণ ফলে কয়টি শূন্য থাকবে বলে মনে হয়?

২৮. বর্গমূলের বর্গমূল

```
   a      1
 ______|_____
 A     C     B
```

উপরের সরলরেখায় AC-এর দৈর্ঘ্য a, CB-এর দৈর্ঘ্য 1, শুধুমাত্র (দাগহীন) একটি রুলার এবং কম্পাস ব্যবহার করে $\sqrt{\sqrt{a}}$ বের করতে হবে।

[সাহায্য: প্রথমে $\sqrt{a}$ বের কর, সেটাকে ব্যবহার করে একই পদ্ধতিতে $\sqrt{(\sqrt{a})}$ বের কর।]

২৯. না ছুঁয়ে ছোট

২৮ নম্বর সমস্যার সরলরেখা AB-কে কোনোভাবে স্পর্শ না করে, না মুছে না কেটে ছোট করতে হবে। কীভাবে?

[সাহায্য : পদ্ধতিটি আমাদের দেশের রাজনীতিবিদদের জানা খুব দরকার।]

৩০. অন্যরকম যোগ

পাশের অঙ্কটি নিশ্চয়ই শুদ্ধ, কিন্তু প্রত্যেকটি অক্ষরের জন্যে একটা নির্দিষ্ট সংখ্যা বের কর যেন যোগ অঙ্কটি শুদ্ধ থাকে।

```
FORTY
  TEN
  TEN
-----
SIXTY
```

৩১. চার সমান পাঁচ?

বেশ কয়েকজন এই সমস্যাটির সমাধান জানতে চেয়ে চিঠি দিয়েছে। সমস্যাটি মজার তাই তার সমাধান না জানিয়ে আমরা এখানে দিয়ে দিচ্ছি।

$16 - 36 = 25 - 45$

দুই পাশে $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ যোগ করে লেখা যায়–

$$4^2 - 2\times4\times\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2\times5\times\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

অথবা $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(5-\frac{9}{2}\right)^2$

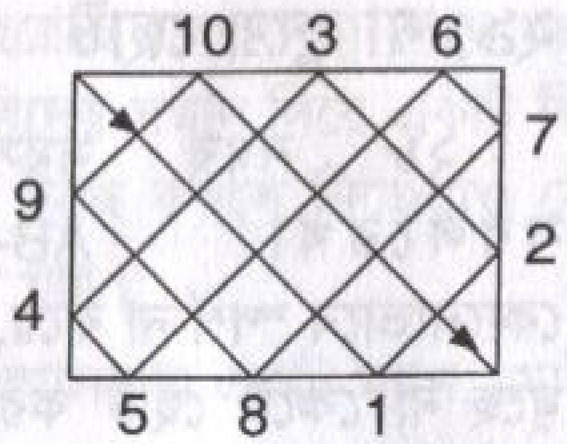
অথবা $4-\frac{9}{2} = 5-\frac{9}{2}$ অর্থাৎ $4 = 5$ তাহলে ভুলটি কোথায়?

[সাহায্য : $(+x)^2 = (-x)^2$]

৩২. বিলিয়ার্ড খেলা

বিলিয়ার্ড বল (বা ক্যারাম বোর্ড) খেলায় গুটি দেয়ালে লেগে ফিরে আসে। পাশের ছবিতে 5×7 ফুট একটি বিলিয়ার্ড টেবিল দেখানো হয়েছে যেখানে এক কোনা থেকে 45° কোণে বলটিকে আঘাত করে ছুড়ে দেয়া হয়েছে এবং টেবিলের

দেয়ালে দশবার ধাক্কা খেয়ে অপর কোণায় গর্তে পড়েছে। টেবিলটি 5×7 ফুট না হয়ে যদি 97×131 ফুট আয়তক্ষেত্র হতো তাহলে কতবার ধাক্কা খেয়ে বলটি গর্তে পড়বে? (ধরে নেয়া হচ্ছে বলটি সহজে থেমে যাবে না!)



৩৩. দ্বিঘাত সমীকরণ

একটু উঁচু ক্লাশে এলেই সবাই শিখে যায় $ax^2 + bx + c = 0$-এর সমাধান হচ্ছে $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, এটি কী প্রমাণ করে দেখাতে পারবে?

৩৪. বোকাদের ভাগ

বলা হয় বোকারা এভাবে ভাগ করে:

$\frac{16}{64}$ এ ওপরে নিচে 6 কাটাকাটি করে পায় $\frac{1}{4}$ এবং দেখা যায় উত্তরটি সঠিক! এভাবে $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$ কিংবা $\frac{49}{98}$ এর বেলাতেও উপরে নিচে একই সংখ্যা কাটাকাটি করে ভাগফল মিলিয়ে দেয়া যায়। বোকাদের জন্যে এরকম আরো একটি ভাগ আছে যেখানে ওপরে নিচে একই সংখ্যা কাটাকাটি করলে ভাগফল মিলে যায় সংখ্যাটি হচ্ছে $\frac{143AB5}{170AB56}$ এখানে A ও B-এর মান কত?

৩৫. ফিবোনিচি ক্রম

ফিবোনাচি ক্রম (Fibonacci Sequence) হচ্ছে—

1, 1, 2, 3, 5, 8, 21, 34, 55, 89...

অর্থাৎ এর প্রথম দুটি সংখ্যা হচ্ছে 1 এবং সব সময় আগের দুটি সংখ্যা যোগ করে পরের সংখ্যাটি তৈরি করা হয়। নিউরনের অনুরণনে অনেকবার আমরা এই সংখ্যা ক্রম নিয়ে মজার মজার সমস্যা দেব। এবারের সমস্যাটি এরকম: 1 দিয়ে শুরু না করে যে-কোনো দুটি সংখ্যা দিয়ে শুরু করে আমরা যদি আগের দুটো সংখ্যা যোগ করে পরেরটি তৈরি করি তাহলে প্রমাণ করতে হবে প্রথম দশটি সংখ্যার যোগ ফল হবে সাত নম্বর সংখ্যার এগারো গুণ।

৩৬. টুপির রঙ

তিনটি সাদা এবং দুটি কালো টুপি থেকে যে-কোনো তিনটি টুপি নিয়ে তিনটি বাচ্চার মাথায় পরিয়ে এক সারিতে দাঁড়া করানো হলো যেন পিছনের বাচ্চাটি সামনের দুজনকে দেখতে পায়, মাঝের বাচ্চাটি শুধু তার সামনের বাচ্চাটিকে এবং সামনের বাচ্চাটি কাউকেই দেখতে পায় না। এবারে টুপির মোট সংখ্যা, রঙ এসব বলে দিয়ে তাদের জিজ্ঞেস করা হলো তাদের মাথায় কী রঙের টুপি তারা অনুমান করতে পারবে কি না। পিছনের বাচ্চাটি বলল সে পারবে না। তখন মাঝের বাচ্চাটিও বলল সেও পারবে না। তাই শুনে প্রথম বাচ্চাটি তার মাথার টুপির রঙ বলে দিল। কীভাবে?

৩৭. এক্স এবং ওয়াই

x এবং y পূর্ণ সংখ্যা এবং $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1996}$ তাহলে x এবং y সমান কত?

[সাহায্য: পুরোটা অঙ্ক কষে করতে পারবে না – আন্দাজ করার পর্যায়ে নিয়ে এসে সম্ভাব্য সংখ্যা বসিয়ে চেষ্টা কর।]

৩৮. বর্গ নিয়ে গোলমাল

টুটুলকে বলা হলো দুটি সংখ্যা বর্গ করে যোগ করতে সে ভুল করে যোগ করে তারপর বর্গ করল কাজেই তার উত্তরটি সঠিক উত্তর থেকে 240 বেশি হয়ে গেল। টুটুলের ছোট বোন সীমা বলল, এটা তো সোজা– কিন্তু সেও একই ভুল করল, আগে যোগ করে তারপর বর্গ করল। ছোট বলে সে আরো একটি ভুল করল, একটা সংখ্যাকে যা লেখা উচিৎ তা না লিখে লিখল 2, কিন্তু তাতে তার উত্তরটা হয়ে গেল সঠিক! সংখ্যা দুটি কী বলতে পারবে?

৩৯. বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

নিচের সংখ্যাগুলো হচ্ছে কয়েকটা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

49, 4489, 444889, 4444 8889 .... খানিকক্ষণ এগুলো নিয়ে চিন্তা-ভাবনা করে বলো, একটা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যদি হয় 444 444 888 889 তাহলে বর্গক্ষেত্রের বাহুর মান কত?

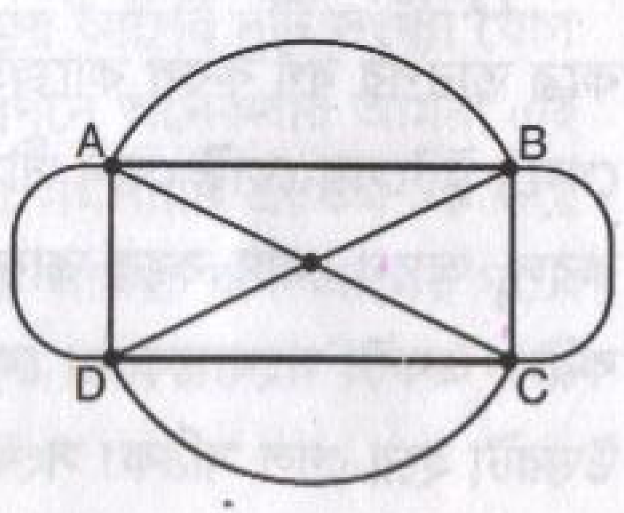
৪০. ঘড়ির কাঁটা

ছয়টার একটু পর বাজারে যাবার সময় বিলু দেখল ঘড়ির ঘণ্টার এবং মিনিটের কাঁটা 110° কোণ করে আছে। সাতটার আগেই সে বাসায় ফিরে এসে দেখে আবার ঘণ্টার এবং মিনিটের কাঁটা 110° কোণ করে আছে। সে কতক্ষণের জন্যে বাজারে গিয়েছিল?

৪১. তিন দিয়ে ভাগ

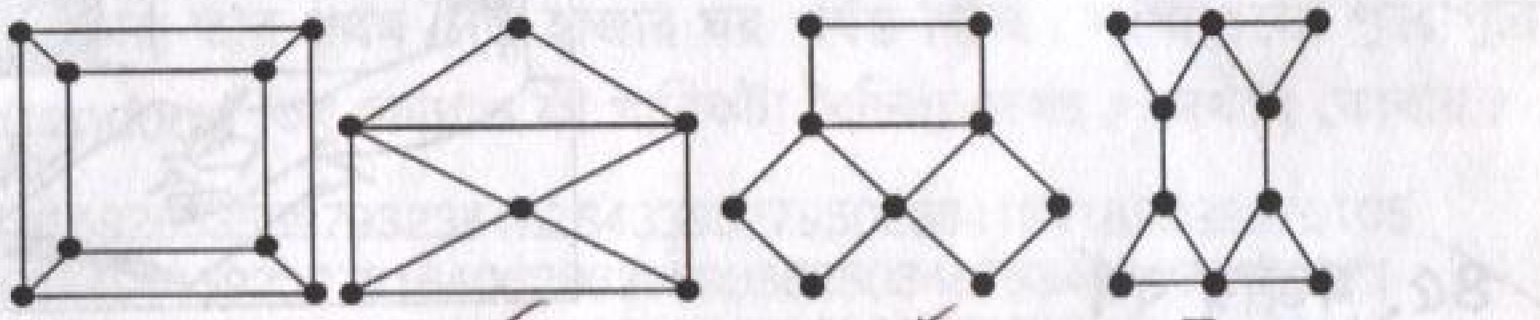
প্রমাণ কর n সংখ্যাটি যতই হোক না কেন $n^3 - n$-কে সব সময় তিন দিয়ে ভাগ করা যায়।

৪২. কলম না তুলে আঁকা



আমি নিশ্চিত তোমাদের সবাই কখনো না কখনো কলম না তুলে পাশের ছবিটি আঁকতে চেষ্টা করেছ। আসলে তার কোনো প্রয়োজন নেই ছবিটির দিকে তাকিয়েই তুমি বলতে পারবে এটি কলম না তুলে আঁকা সম্ভব কি না। ছবিটির পাঁচটি

বিন্দু A, B, C, D এবং O-তে কয়েকটি রেখা এসে মিলেছে, রেখাগুলোর সংখ্যা গুণে দেখ সবগুলো যদি জোড় সংখ্যক হয় কিংবা মাত্র দুটি বেজোড় সংখ্যক হয় তাহলে তুমি কলম না তুলে ছবিটি আঁকতে পারবে। (যেখান থেকে আঁকা শুরু করা হয়েছে এবং যেখানে শেষ হয়েছে, শুধুমাত্র সেখানে বেজোড় সংখ্যক রেখা এসে মিলবে।) এই ছবিতে A, B, C এবং D বিন্দুতে পাঁচটি করে রেখা এসে মিলেছে, অর্থাৎ বেজোড় রেখার সংখ্যা চার কাজেই তুমি কখনোই এটা আঁকতে পারবে না। এখন বল নিচের কোন কোন ছবিটি কলম না তুলে আঁকা সম্ভব?



৪৩. ছোট গাউসের বড় বুদ্ধি

সর্বকালের শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ গাউস (Gauss) যখন একেবারে শিশু তখন থেকে তিনি অংকে খুব ভালো ছিলেন। শিক্ষক যখন তাকে কিছু একটা সমাধান করতে দিতেন তিনি সেটা চোখের পলকে করে ফেলতেন। শিক্ষক ত্যক্ত বিরক্ত হয়ে একদিন বললেন, "যাও 1 থেকে 100 পর্যন্ত যোগ করে নিয়ে আস"– ভাবলেন একশটা যোগ করতে নিশ্চয়ই খানিকটা সময় লাগবে! গাউস কিন্তু চোখের পলকে কাগজে উত্তর লিখে নিয়ে এলেন, 5050! শিক্ষক চোখ কপালে তুলে বললেন, "এত তাড়াতাড়ি কীভাবে করলে?" গাউস বললেন, "1 আর 100 হচ্ছে 101, 2 আর 99 হচ্ছে 101, 3 আর 98 হচ্ছে 101 অর্থাৎ 1 থেকে 100 পর্যন্ত যোগ করার অর্থ পঞ্চাশটি 101 যোগ করা, অন্য কথায় $50 \times 101 = 5050$!" গণিতের ভাষায় সেটা লেখা যায়—

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

এটি ব্যবহার করে প্রমাণ কর শুধু বেজোড় সংখ্যার সারি যোগ করলে যোগ ফল পূর্ণ বর্গসংখ্যা হয়।

অর্থাৎ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots + 2n - 1 = n^2$

৪৪. চিঠি এবং খাম

তুমি চারটি চিঠি লিখেছ, সেই চিঠি পাঠাবার জন্যে চারটি খামে ঠিকানা লিখেছ, ঠিক তখন লোড শেডিং হয়ে ইলেকট্রিসিটি চলে গেল। অন্ধকারেই তুমি খামের মাঝে চিঠিগুলো ঢুকিয়ে রাখলে। শুধুমাত্র তিনটি চিঠি ঠিক ঠিক খামে যাওয়ার সম্ভাবনা কত ?

৪৫. মজার বর্গ

চার সংখ্যার একটা পূর্ণ বর্গ সংখ্যা বের কর যার প্রথম দুটি সংখ্যা অভিন্ন, পরের দুটি সংখ্যাও অভিন্ন। 7744 = (88)²

৪৬. ডায়োফেন্টাসের কবর

এই সমস্যাটি একটি অত্যন্ত প্রাচীন অঙ্ক। আনুমানিক ২৫০ খ্রিস্টাব্দের ডায়োফেন্টাসের (Diophantus) কবরের গায়ে লেখা যে তার জীবনের ছয় ভাগের এক ভাগ ছিল তার শৈশব, বারো ভাগের এক ভাগ তার কৈশোর। তারপর জীবনের সাত ভাগের এক ভাগ অতিক্রম করে তিনি বিয়ে করলেন। বিয়ের পাঁচ বছর তার একটি ছেলে হলো। ছেলের আয়ু ছিল তার আয়ুর অর্ধেক এবং ছেলে মারা যাবার পর শোকাহত ডায়োফেন্টাস মাত্র চার বছর বেঁচে ছিলেন। ডায়োফেন্টাস সব মিলিয়ে কত বছর বেঁচে ছিলেন ? ৮৪

৪৭. পাঁচ দিয়ে ভাগ

প্রমাণ কর যে-কোনো n-এর জন্যে $n^5 - n$ সব সময় 5 দ্বারা ভাগ করা যায়।
$n^5 - n = n(n^2+1)(n^2-1)$

৪৮. এক্স সমান কত ?

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots n^3 = (1 + 2 + 3 \dots n)^x$ এটি মোটামুটিভাবে একটি অভূতপূর্ব ব্যাপার! x-এর মান কত ? X=2

৪৯. পাই নিয়ে মজা

π-এর কথা তোমরা সবাই জান। তোমরা অনেক সময় এর মান $\frac{22}{7}$ বা 3·14 ব্যবহার করেছ যদিও প্রকৃতপক্ষে এটি পূর্ণাঙ্গভাবে কখনোই জানা যাবে না– কারণ এটি একটি Transcendental সংখ্যা যার অর্থ এটি কোনো এলজেবরার সমীকরণের সমাধান নয়। যদিও π-এর মান দশমিকের পর 39 ঘর জানলেই বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের ব্যাসার্ধ হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ পর্যন্ত নিখুঁতভাবে বলে দেয়া সম্ভব তারপরও গণিতবিদরা এটি আরো নিখুঁতভাবে জানার চেষ্টা করছেন! এখন পর্যন্ত দশমিকের পর প্রায় লক্ষ কোটি ঘর (Trillion) পর্যন্ত বের করে ফেলা হয়েছে– আমরা তার প্রথম দেড় হাজার ঘর পর্যন্ত দিচ্ছি। সংখ্যাগুলো পুরোপুরি বিক্ষিপ্ত (random) তবু কোথাও কী খানিকটা বৈচিত্র্য দেখছ ? দেখলে কোথায় ?

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105
8209749445923078164062862089986280348253421170679821
4808651328230664709384460955058223172535940812848111
7450284102701938521105559644622948954930381964428810
9756659334461284756482337867831652712019091456485669
2346034861045432664821339360726024914127372458700660
6315588174881520920962829254091715364367892590360011
3305305488204665213841469519415116094330572703657595
9195309218611738193261179310511854807446237996274956
7351885752724891227938183011949129833673362440656643
0860213949463952247371907021798609437027705392171762
9317675238467481846766940513200056812714526356082778
5771342757789609173637178721468440901224953430146549
5853710507922796892589235420199561121290219608640344
1815981362977477130996051870721134999999837297804995
1059731732816096318595024459455346908302642522308253
3446850352619311881710100031378387528865875332083814
2061717766914730359825349042875546873115956286388235
3787593751957781857780532171226806613001927876611195
9092164201989380952572010654858632788659361533818279
6823030195203530185296899577362259941389124972177528
3479131515574857242454150695950829533116861727855889
0750983817546374649393192550604009277016711390098488
2401285836160356370766010471018194295559619894676783
7449448255379774726847104047534646208046684259069491
2933136770289891521047521620569660240580381501935112
5338243003558764024749647326391419927260426992279678
2354781636009341721641219924586315030286182974555706
7498385054945885869269956909272107975093029553211653
4498720275596023648066549911988183479775356636980742
6542527862551818417574672890977772793800081647060016
1452491921732172147723501414419735

৫০. সন্ত্রাসীর যন্ত্রণা

তিন সন্ত্রাসী— পিচ্চি, হ্যাংলা এবং ঢ্যাংগা। এর মাঝে সবচেয়ে ভয়ঙ্কর ঢ্যাংগা— যতবার তার কাটা রাইফেল দিয়ে গুলি করে ততবার লক্ষ্যভেদ করে। হ্যাংলা এতটা পারে না– তিনবার গুলি করলে তার দুইবার লক্ষ্যভেদ হয়। পিচ্চি এই লাইনে নতুন— তিনবার গুলি করলে একবার লক্ষ্যভেদ হয়। একদিন চাঁদাবাজির বখরা ভাগাভাগি নিয়ে নিজেদের মাঝে ঝগড়া করে সবাই সবার শত্রু হয়ে গিয়ে পাশাপাশি দাঁড়িয়েছে একে অপরকে গুলি করবে বলে। প্রথমে গুলি করবে পিচ্চি তারপর (বেঁচে থাকলে) হ্যাংলা এবং সবশেষে (বেঁচে থাকলে) ঢ্যাংগা। বেঁচে থাকার সম্ভাবনা বাড়ানোর জন্যে পিচ্চির কাকে গুলি করা উচিৎ?

৫১. পরপর সংখ্যার গুণ

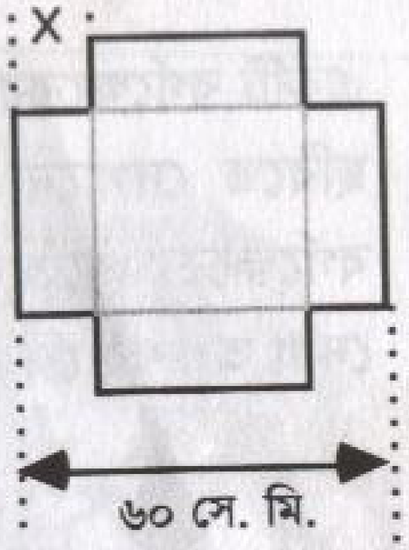
প্রমাণ কর পরপর চারটি সংখ্যাকে গুণ করলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় সেটি সব সময়েই একটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা থেকে এক কম।

$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$

৫২. অক্ষাংশ দ্রাঘিমাংশ

সিলেটের শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয়ের অক্ষাংশ (Latitude) এবং দ্রাঘিমাংশ (Longitude) হচ্ছে যথাক্রমে N24˚55′17.8″ এবং E91˚49′49·1″ সিলেট রেলস্টেশনের অক্ষাংশ এবং দ্রাঘিমাংশ হচ্ছে N24˚52′55·0″ এবং E91˚52′00·2″. শাহজালাল বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিশ্ববিদ্যালয় থেকে সিলেট রেলস্টেশনের দূরত্ব কত?

৫৩. বাক্সের সাইজ



60 সেন্টিমিটার বর্গাকৃতির একটা বোর্ডের চার কোণা থেকে x পরিমাণ কেটে নিয়ে কাগজটা ভাঁজ করে একটা (ঢাকনাহীন) বাক্স তৈরি করা হয়েছে। x–এর মান কত হলে বাক্সটিতে সবচেয়ে বেশি জিনিস আঁটানো যাবে?

৫৪. মজার গুণ

এই মজার অঙ্কগুলো লক্ষ কর

(ক) $4\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{7} = 4\frac{1}{2} + 1\frac{2}{7}$

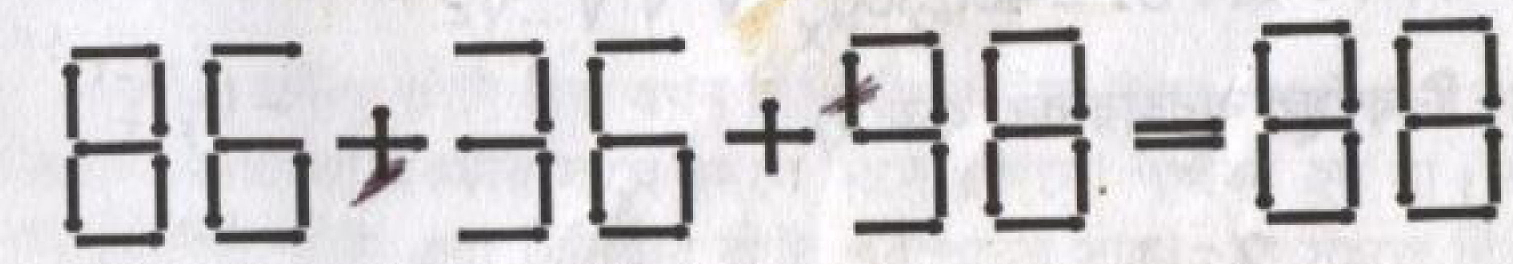
(খ) $2\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5} = 2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{5}$

(গ) $1\frac{5}{6} \times 2\frac{1}{5} = 1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{5}$ গুণ করলে যা পাওয়া যায়– যোগ করলেও তাই।

অঙ্কগুলোতে কী কোনো একটি নিয়ম রয়েছে? তুমি একটা তৈরি করতে পারবে?

৫৫. ম্যাচ কাঠির অঙ্ক

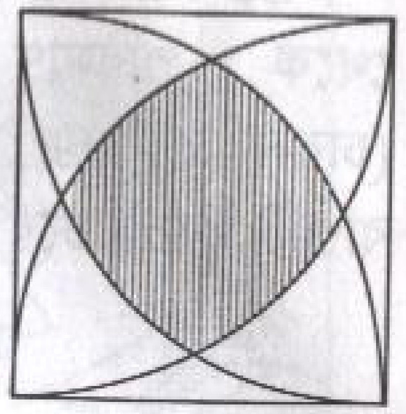
৫৭টি ম্যাচের কাঠি বসিয়ে এই অঙ্কটি লেখা হয়েছে– কিন্তু এটি ভুল। দু'টি কাঠি সরিয়ে নিয়ে অঙ্কটি শুদ্ধ করতে হবে!



86 - 36 + 38 = 88.

৫৬. বর্গক্ষেত্রে বৃত্তাংশ

একটি বর্গক্ষেত্রের চারকোনাকে কেন্দ্র হিসেবে ব্যবহার করে ছবিতে দেখানো উপায়ে বৃত্তের অংশ আঁকা হয়েছে। বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটা বাহু 1 মিটার হলে মাঝখানের দাগ দেয়া অংশের ক্ষেত্রফল কত ?



৫৭. ম্যাচকাঠির ত্রিভুজ

৬টি ম্যাচের কাঠি ব্যবহার করে সবচেয়ে বেশি কতগুলো সমবাহু ত্রিভুজ তৈরি করা সম্ভব ?

[সাহায্য : এক সমতলে থাকতেই হবে কে বলেছে ?]

৫৮. জন্মদিনের কেক

একটা কেককে (না ছুঁয়ে) তিনবার কেটে সবচেয়ে বেশি কয় টুকরো করতে পারবে ?

[সাহায্য : না, জন্মদিনে আমরা এভাবে কেক কাটি না!]

৫৯. কাগজ ভাঁজ

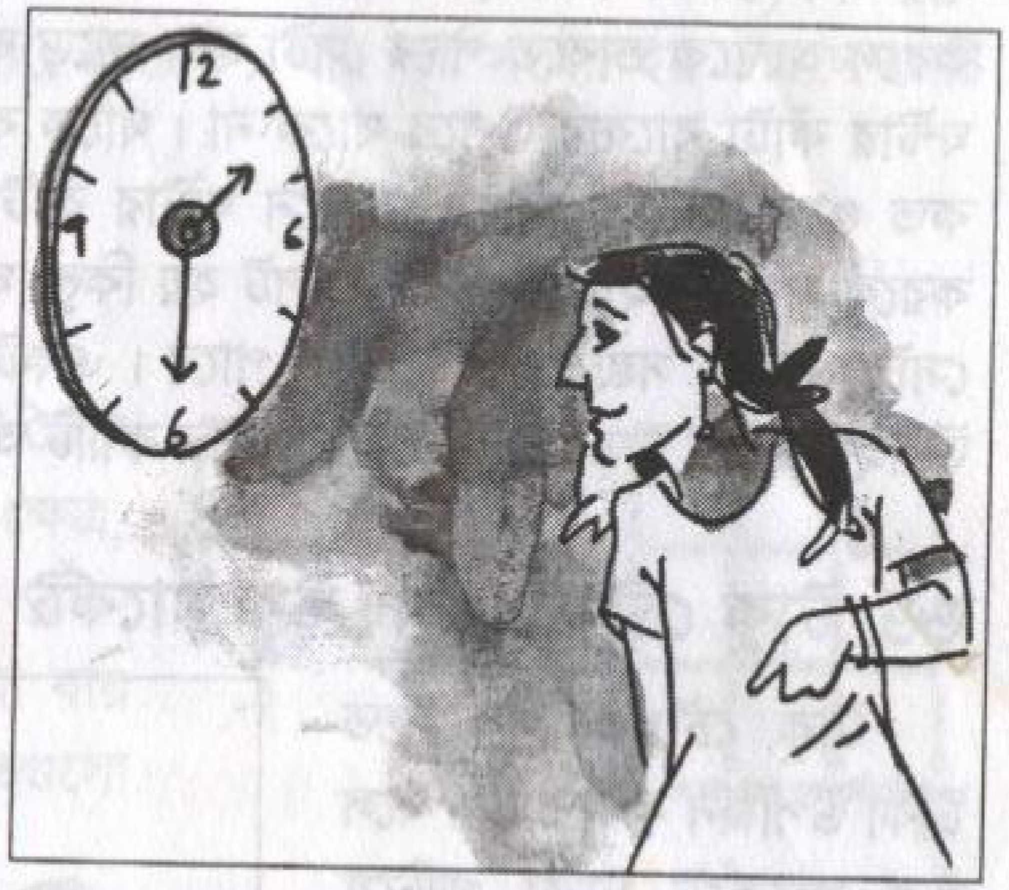
সাতটা সরল রেখা এঁকে একটা কাগজকে সবচেয়ে বেশি কয়টি অংশে ভাগ করা যাবে ?

৬০. একত্রিশটি বর্গমূল

x-এর মান কত হলে $31 = -\log_2 \log_x \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}$

(এখানে 31 টি বর্গমূল ব্যবহার করা হয়েছে)

৬১. ঘড়ি এবং হ্যামবার্গার



এবারের সমস্যাগুলো হচ্ছে ঘড়ি নিয়ে। মনে করো তোমার ঘড়িটি সময় ঠিক দিচ্ছে না– কোনো কারণে খানিকটা সময় পিছিয়ে কিংবা এগিয়ে গেছে। বাসায় টেলিফোনও নেই যে কাউকে ফোনে জিজ্ঞেস করে সময় ঠিক করে নেবে। তখন মনে পড়ল রাস্তার মোড়ে একটা ফাস্ট ফুডের দোকানে বড় একটা ঘড়িতে সবসময় সঠিক সময় দেখানো হয়। তুমি বাসা থেকে বের হয়ে ফাস্টফুডের দোকানে গেলে, সেখানে বসে একটা হ্যামবার্গার খেয়ে ফিরে এসে নিজের ঘড়ির সময় ঠিক করে নিলে। কীভাবে ?

৬২. ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা একসাথে

ঘড়ির ঘন্টা এবং মিনিটের কাঁটা কতগুলো জায়গায় একটা ঠিক আরেকটার উপর বসে ?

৬৩. ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা বিপরীতে

কতগুলো বিভিন্ন সময়ে ঘন্টার কাঁটা এবং মিনিটের কাঁটা একটা ঠিক আরেকটার বিপরীতে থাকে ?

৬৪. ঘন্টা এবং মিনিটের কাঁটা সমকোণে

কতগুলো বিভিন্ন সময়ে ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা আর মিনিটের কাঁটা একটা আরেকটার সাথে সমকোণ তৈরি করে (যেমন ৩টার সময়) ?

৬৫. অদল বদল

ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ঠিক যখন মিনিটের কাঁটার উপর থাকে (৬২ নং সমস্যা) তখন একটা আরেকটার সাথে বদলে নিলে কোনো পার্থক্য হয় না। অন্য সময় কিন্তু ঘন্টার কাঁটা এবং মিনিটের কাঁটা পরস্পরের সাথে এত সহজে বিনিময় করা

যায় না। (যেমন যখন ছয়টা বাজে তখন ঘণ্টার কাঁটা এবং মিনিটের কাঁটা বিনিময় করলে অনেকে ভাবতে পারে সেটা হবে সাড়ে বারোটা, কিন্তু সাড়ে বারোটার সময় ঘণ্টার কাঁটা বারোর উপরে থাকে না। থাকে বারো এবং একের মাঝে) ঘড়িতে কত গুলো জায়গা আছে যেখানে ঘণ্টার কাটা এবং মিনিটের কাঁটা বদলাবদলি করলে সময়টা হয়তো ওলট পালট হয় কিন্তু ঘড়ির কাঁটায় যান্ত্রিক ঘূর্ণনের ফলে সেটা একটা সম্ভাব্য স্থান হতে পারে। একটার উপর আরেকটা বসে থাকার উদাহরণগুলো ছাড়া এরকম সম্ভাব্য স্থান কয়টি আছে?

৬৬. টাকু চৌধুরী এবং স্টক মার্কেট

টাকু চৌধুরী খুব দ্রুত টাকা উপার্জন করতে চায় বলে স্টক মার্কেটে টাকা খাটিয়ে প্রথম মাসে 20% এবং যেটুকু বাকি থাকল তার 30% পরের মাসে খুইয়ে বসল। তৃতীয় মাসেও তার অবস্থা হলো খারাপ সে 20,000 টাকা গচ্চা দিল। তবে চতুর্থ মাসে তার ভাগ্য খানিকটা সুপ্রসন্ন হলো এবং এতদিনে তার যত ক্ষতি হয়েছে তার 75% সে পুষিয়ে নিল। তখন কাগজ কলম নিয়ে সে হিসেব করতে বসেছে। সে দেখল প্রথমে সে যত টাকা স্টক মার্কেটে খাটিয়েছে তার 25% থেকে 9,000 টাকা কম ক্ষতি হয়েছে। টাকু চৌধুরী স্টক মার্কেটে কত টাকা খাটিয়েছিল?

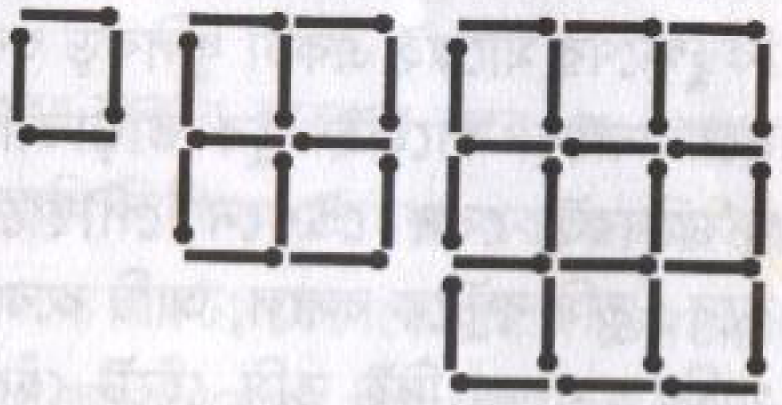
৬৭. ত্রিমাত্রিক সমীকরণ

যারা একটু উপরের ক্লাশ পর্যন্ত গিয়েছে তারাই দ্বিমাত্রিক সমীকরণ ($x^2 + ax + b = 0$) সমাধান করতে শিখে গেছে (নিউরনে অনুরণন 33 নম্বর সমস্যা)। সমীকরণটি যদি দ্বিমাত্রিক না হয় ত্রিমাত্রিক হয় তাহলে কী হবে? একটি উপায় হচ্ছে গ্রাফ পেপারে মান বসিয়ে সমাধান করা। বল দেখি $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ এই সমীকরণের সমাধান কয়টি এবং কী কী?

৬৮. চতুর্মাত্রিক ?

$(x^2 + 2)(x^2 + 1) = 2550$ এখানে x যদি পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে সেটি কত?

৬৯. ম্যাচ কাঠির বর্গ



ম্যাচ কাঠি দিয়ে এরকম নক্সা তৈরি করা সম্ভব, প্রথমটিতে 1টি বর্গ ক্ষেত্র, দ্বিতীয়টিতে 4টি, তৃতীয়টিতে 9টি। এভাবে দশ নম্বর পর্যন্ত যাওয়া যায় তাহলে সেই দশ নম্বরটিতে কতগুলো ম্যাচ কাঠি লাগবে?

৭০. আজব ভাগ

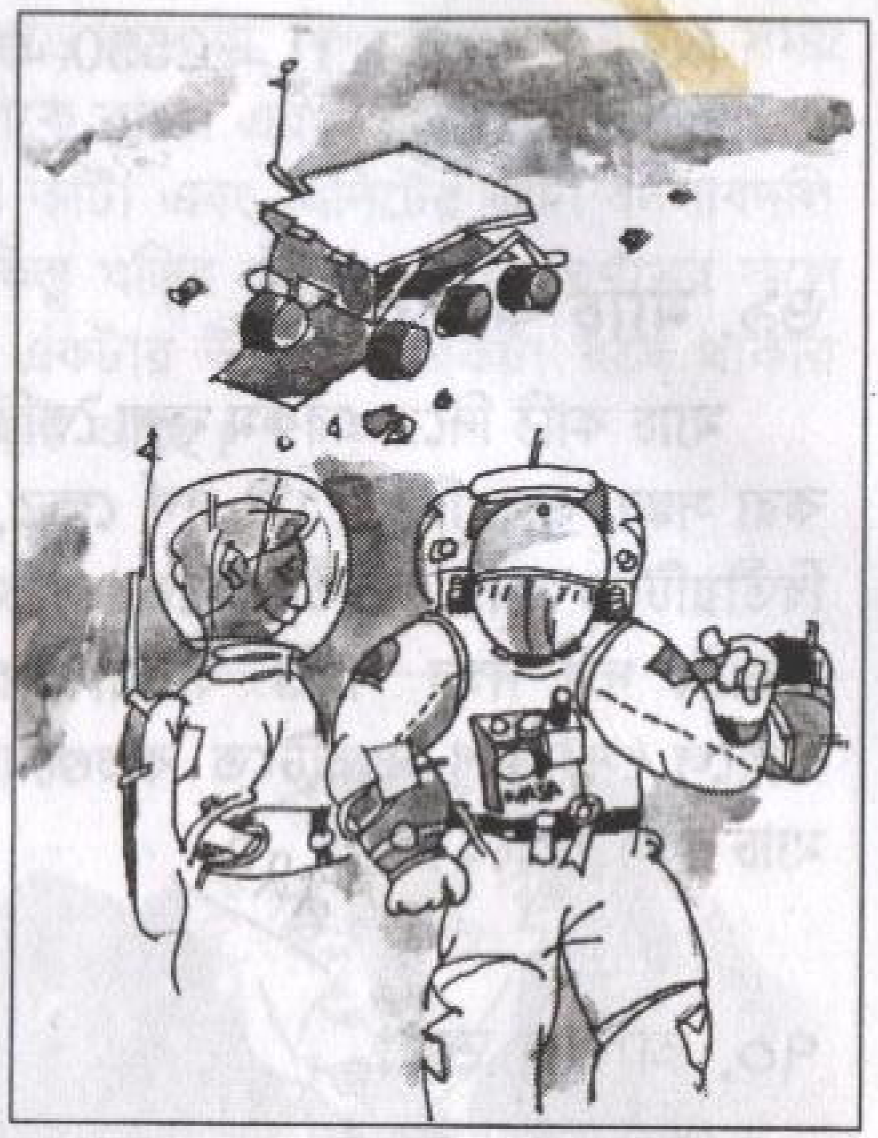
এই ভাগ অঙ্কটিতে অক্ষরগুলোর মান বের কর :

```
PD)YXQXZ(ZEP
   DB
   PYX
   ZHS
    YBZ
    YYY
      PY
```

৭১. ছোট ছেলের হিসেব

তুমি একটা দোকান থেকে চারটি ছোট ছোট জিনিস কিনেছ। দোকানে একটা ছোট ছেলে বেচা-কেনা করছে। সে বলল সব মিলিয়ে হয়েছে 7 টাকা 20 পয়সা। এত ছোট ছেলে হিসেব ঠিক করে করতে পেরেছে কী না তোমার সন্দেহ হলো– তুমি জিজ্ঞেস করলে, "কীভাবে হিসেব করেছ?" ছেলেটি বলল, "সবগুলো গুণ করে দিয়েছি!" তুমি বললে, "আরে বোকা, কিছু কেনাকাটা করলে তার দামগুলো গুণ করতে হয় না। যোগ করতে হয়।" ছেলেটি লজ্জা পেয়ে দামগুলো যোগ করে বলল, এবারও 7 টাকা 20 পয়সা হয়েছে! তুমি যে জিনিসগুলো কিনেছ তার দাম কত কত ছিল?

৭২. মঙ্গল গ্রহে একদিন



তুমি এবং তোমার বন্ধু বল্টুর মহাকাশযান মঙ্গলগ্রহে ক্র্যাশ ল্যান্ডিং করেছে। তোমাদের জিনিসপত্র রবোট-গাড়িতে বসিয়ে দেখলে এখন সেখানে মাত্র একজন বসার জায়গা আছে। কিছুক্ষণের মাঝেই একটা ধূলিঝড় শুরু হয়ে যাবে কাজেই খুব তাড়াতাড়ি দু'জনেরই বেস স্টেশনে পৌঁছাতে হবে। তুমি বল্টুকে বললে, আমি রবোট গাড়িতে রওনা দিই তুমি হেঁটে হেঁটে আসতে থাক। খানিক দূর গিয়ে আমি রবোট-গাড়িকে তোমার কাছে পাঠিয়ে দিয়ে হেঁটে বাকি দূরত্বটা চলে যাব, আর রবোট গাড়িটা যখন তোমাকে ধরে ফেলবে তুমি সেটাতে উঠে বাকিটা চলে আসবে। বল্টু হাতে কিল দিয়ে বলল, চমৎকার আইডিয়া! মঙ্গলগ্রহে আমরা ঘণ্টায় হেঁটে যেতে পারি পাঁচ কিলোমিটার। রবোট গাড়ি যেতে পারে ঘণ্টায় পঁচিশ কিলোমিটার। আমাদের বেস স্টেশন এখান থেকে একশ কিলোমিটার। আমরা যদি সবচেয়ে কম সময়ে পৌঁছাতে চাই তাহলে তুমি রবোট-গাড়িতে কত দূর গিয়ে সেটাকে ফেরৎ পাঠাবে ? তোমরা উত্তরটা বলতে পারবে ?

৭৩. বর্গ নিয়ে মজা

তিন অঙ্কের একটা সংখ্যা বের কর যেটাকে 11 দিয়ে ভাগ করা যায় এবং ভাগফলটা হয় তিন অঙ্কের প্রত্যেকটির বর্গের যোগফল।

(উদাহরণ 550, কারণ 550 ÷ 11= 50 এবং $(5)^2 + (5)^2 + (0)^2 = 50$)

৭৪. আটবারে হাজার

1000-কে একই অঙ্ক আটবার ব্যবহার করে প্রকাশ কর (যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ ইত্যাদি করা যেতে পারে।)

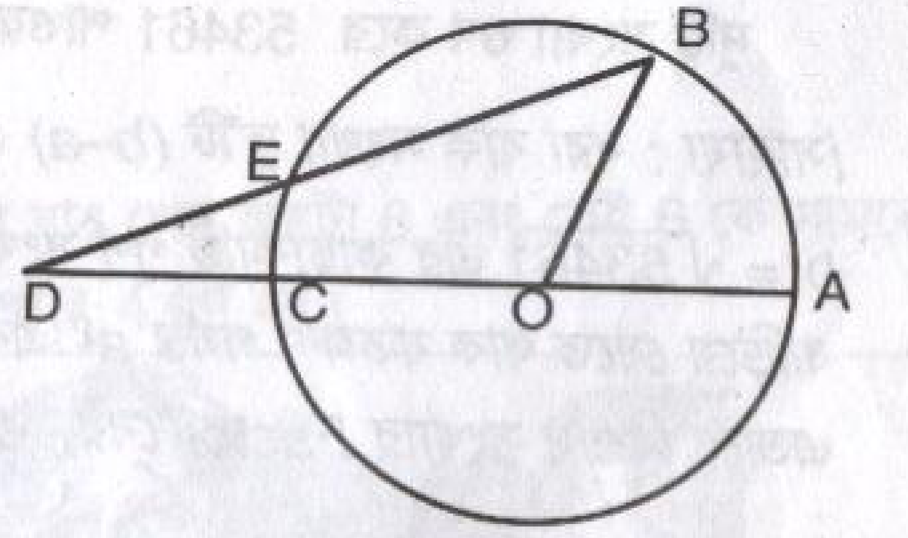
৭৫. পরপর গুণ

পরপর তিনটি সংখ্যাকে গুণ করে (যেমন 7,8,9 বা 13,14,15) তার সাথে মাঝখানের সংখ্যা যোগ করলে কী পাওয়া যায় ?

৭৬. কোণকে তিন ভাগ

তোমরা সবাই জান একটা কম্পাস এবং রুলার ব্যবহার করে যে কোনো একটি কোণকে দুইভাগে ভাগ করা যায়। আমি নিশ্চিত তোমরা যারা জ্যামিতির মাঝে মজা খুঁজে পেয়েছ তারা কখনো না কখনো একটা কোণকে সমান তিনভাগে ভাগ করার চেষ্টা করেছ। বিশেষ বিশেষ কোণ ছাড়া (যেমন সমকোণ) যে কোনো একটি কোণকে আসলে সমান তিনভাগে ভাগ করা যায় না (এটা প্রমাণ করা হয়েছে কাজেই শুধু শুধু চেষ্টা করে সময় নষ্ট করো না!)। নিচে আর্কিমিডিসের একটা কোণকে সমান তিন ভাগ করার একটা পদ্ধতি দেয়া হলো– তবে এটি শুধু কম্পাস এবং রুলার ব্যবহার করে আঁকা সম্ভব নয় বলে গ্রহণযোগ্য নয়।

ধরা যাক AOB কোণটিকে তিনভাগে ভাগ করতে চাও। OB ব্যাসার্ধ নিয়ে একটা বৃত্ত আঁক। B বিন্দু থেকে BD রেখা আঁক যেন সেটা ব্যাস AD–কে এমনভাবে স্পর্শ করে যেন ED বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হয়।



প্রমাণ কর কোণ BDO কোণ AOB-এর তিন ভাগের এক ভাগ।

৭৭. শাপলা ফুল

একটা গোল পুকুরে একটা শাপলা ফুল ফুটেছে–সেটা সাধারণ শাপলা নয়–প্রতিদিন তার আকার দ্বিগুণ হয়ে যায় এবং ২০ দিনের মাথায় দেখা গেল শাপলাটি পুরো পুকুর ভরে ফেলেছে। কত দিনে পুকুরের চারভাগের একভাগ ভরেছিল ?

৭৮. গাছের গুঁড়িতে আগুন

তোমার কাছে দুই টুকরো গাছের গুঁড়ি রয়েছে যেগুলো ঠিক এক ঘণ্টা জ্বলতে পারে – তবে কতক্ষণে কতটুকু জ্বলবে তার কোনো রকম গ্যারান্টি নেই (হয়তো অর্ধেকটুকু জ্বলতে সময় নিল মাত্র দশ মিনিট কিন্তু বাকি অর্ধেক ধিকি ধিকি করে জ্বলল পঞ্চাশ মিনিট।) এখন এই দু'টি গাছের গুঁড়ি ব্যবহার করে ঠিক পঁয়তাল্লিশ মিনিট সময় মাপতে পারবে ?

৭৯. গুণের হিসেব

দুটি সংখ্যা গুণ করে 53461 পাওয়া গেছে– সংখ্যা দু'টি কত ?

[সাহায্য : ধরা যাক সংখ্যা দু'টি (b–a) এবং (b + a) অর্থাৎ $53461 = b^2 - a^2$ $b = \sqrt{53461}$ এর কাছাকাছি পূর্ণ সংখ্যা 232 দিয়ে শুরু করে এক এক করে বাড়িয়ে যেতে থাক যতক্ষণ পর্যন্ত a^2 একটি পূর্ণবর্গ না হচ্ছে! গণিতবিদ Fermat এভাবে বিশাল সংখ্যার Factor বের করে ফেলতেন !]

৮০. পাই-এর ধারা

৪৯ নম্বর সমস্যায় আমরা বলেছিলাম π একটি Transcendental সংখ্যা এবং সেটা কখনোই পূর্ণাঙ্গভাবে জানা যাবে না। π বের করার সবচেয়ে সহজ সিরিজটার নাম গ্রেগরি-লিবনিজ সিরিজ (Gregory–Leibniz) :

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\cdots\cdots\right)$$

π-এর মান দশমিকের পর দুইঘর পর্যন্ত নিখুঁতভাবে বের করতে হলে এই সিরিজের কত ঘর পর্যন্ত নিতে হতে পারে ?

৮১. গুণ ও যোগ

1,1,1 এবং 1 এই চারটি সংখ্যার একটা বৈশিষ্ট্য আছে, এর যে কোনো তিনটার গুণফলের সাথে চতুর্থটা যোগ করা হলে যোগফল হয় 2. এরকম আরো চারটি সংখ্যা বের করতে পারবে ? (সাহায্য : সংখ্যাগুলো বাস্তব-অর্থাৎ positive বা Negative দুই-ই হতে পারে।)

৮২. ক্লাশ টিচারের বই

একটা স্কুলের বাচ্চাদের উৎসাহ দেবার জন্যে একজন ক্লাশ টিচারকে বেশ কিছু বই দিয়ে বললেন, "প্রথম দিনে যারা সবচেয়ে সুন্দর ছবি আঁকে তাদের একজনকে একটি বই দেবেন। তারপর যে বইগুলো বাকি থাকবে তার সাত ভাগের এক ভাগ বই দেবেন যারা অংকে খুব ভালো। যে বইগুলো বাকি থাকবে, দ্বিতীয় দিনে তার ভেতর থেকে দু'টি বই দেবেন ছবি আঁকার জন্যে, তারপর বাকি বইগুলোর সাতভাগের একভাগ দেবেন অঙ্ক করার জন্যে। ঠিক সেভাবে তৃতীয় দিনে তিনটি বই দেবেন ছবি আঁকার জন্যে বাকি বইয়ের সাত ভাগের এক ভাগ দেবেন অঙ্কে ভালো করার জন্যে। এভাবে যতদিন সবগুলো বই দেয় না হচ্ছে দিতে থাকুন।" ক্লাশ টিচারকে কয়টা বই দেয়া হয়েছিল, তার কয়দিন লেগেছিল সবগুলো বই দিতে ?

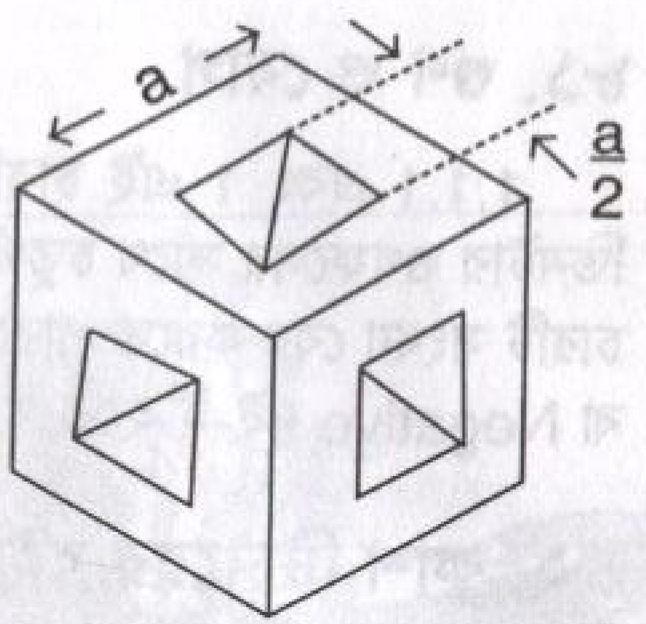
৮৩. সংখ্যার মজা

এমন একটা পূর্ণ সংখ্যা বের কর যার শেষ অঙ্কটা 6 এবং সেই 6 কে সামনে নিয়ে এলে নূতন সংখ্যাটি আগের সংখ্যার 4 গুণ হয়।

৮৪. বুদ্ধিমান ক্রেতা

একটা প্রপার্টি ডেভেলপমেন্ট থেকে জমি কেনার পর সেই কোম্পানি সবার হাতে ১০০ মিটার লম্বা একটা দড়ি দিয়ে বলল এটা দিয়ে যে চতুর্ভুজ বানাতে পারবে সেটাই রেজিস্ট্রি করে দিয়ে দেয়া হবে! বুদ্ধিমান ক্রেতা হলে সে কত বড় জমির মালিক হবে ?

৮৫. কিউবে গর্ত



একটা কিউবের ঠিক মাঝখানে কিউবের এক বাহুর অর্ধেক দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্রের পরিমাণ ফুটো করে নেয়া হলো। কিউবের সব দিক দিয়ে ফুটো করে নেয়ায় কিউবটির পৃষ্ঠদেশের পরিমাণ শতকরা কতভাগ বেড়েছে কিংবা কমেছে?

৮৬. সংখ্যার রূপ

এবারে সমস্যাগুলো সংখ্যা নিয়ে (Number theory) চিন্তা করে বের করার জন্যে চমৎকার! যেমন ধরা যাক এই সহজ গুণটি:

$32 \times 81 = 2592$

এটাকে কী খুব একটা মজার রূপে লেখা যায়?

৮৭. লুকিয়ে থাকা মান

$$\frac{3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots n^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots m^2} = 2$$

n এবং m এর মান কত?

৮৮. বিচিত্র বর্গ

তোমরা সবাই জান $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

একটা পূর্ণ বর্গ। কিন্তু তোমরা কী জান $a^2 + 3ab + b^2$ ও একটা পূর্ণ বর্গ হতে পারে? যদি হতে হয় তাহলে a এবং b–এর মান কত হবে?

[সাহায্য : দুটোই 10 এর নিচে]

7, 3

৮৯. পারফেক্ট সংখ্যা

6 কে যেসব সংখ্যা দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায় সেগুলো হচ্ছে 1, 2 এবং 3 এবং মজার ব্যাপার হচ্ছে 6 = 1 + 2 + 3 যে সব সংখ্যা এরকম তাদের বলে perfect সংখ্যা। Perfect সংখ্যা খুব ঘন ঘন পাওয়া যায় না — আরো কয়েকটি perfect সংখ্যা হচ্ছে 496, 8128, 33550336, 8589869056,... ইত্যাদি। 6 এবং 496 এর ভেতরে একটা perfect সংখ্যা আছে সেটা বের করতে পারবে?

[সাহায্য : সংখ্যাটি 100-এর ভেতরে]

৯০. মজার প্যাটার্ন

নিচের মজার প্যাটার্নগুলো লক্ষ করে m এবং n এর মান বের কর :

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = + 25^2 + 26^2 + 27^2$

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$

⋮

$n^2 + \dots (6611)^2 + (6612)^2 = (6614)^2 + (6614)^2 + \dots m^2$

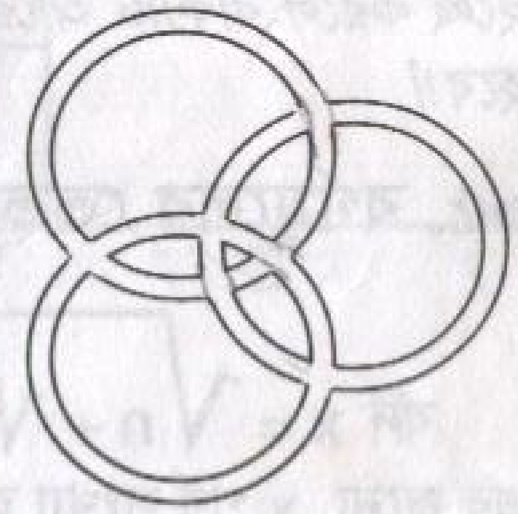
⋮

৯১. দশ থেকে চল্লিশ

$(5+\sqrt{-15})$, $(5-\sqrt{-15})$ অথবা $5+3.872983346$, $5-3.872983346$

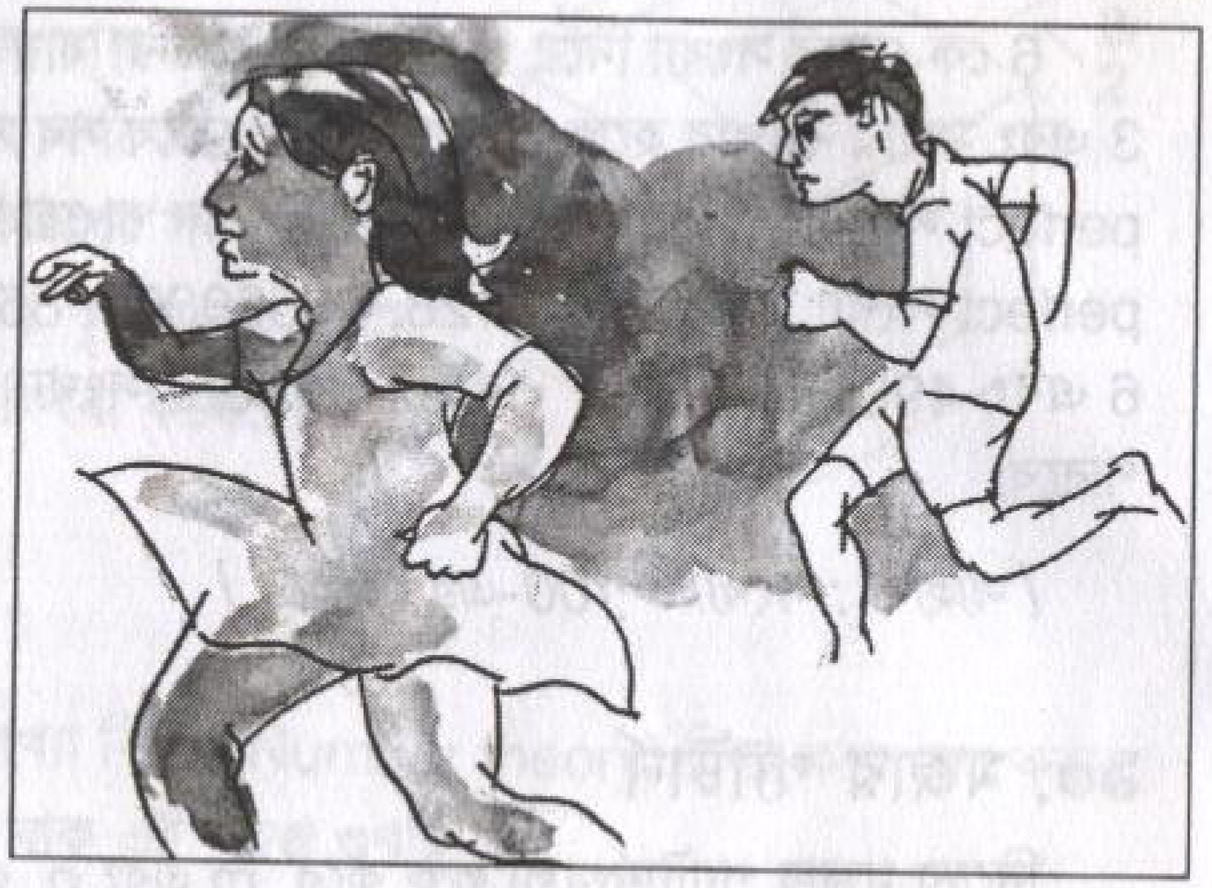
দশকে এমন দুইভাগে ভাগ কর যেন তাদের গুণ করলে চল্লিশ হয়।

৯২. রিং নিয়ে মজা



পাশে তিনটি রিং এমনভাবে আঁকা হয়েছে যে কোনটি উপরে কোনটি নিচে বোঝা যাচ্ছে না। তোমরা ছবিটিতে রিংগুলো এমনভাবে এঁকে দাও যেন তিনটি রিং একে অন্যের সাথে আটকে থাকে কিন্তু কোনো দু'টি যেন একটির ভেতরে আরেকটা ঢুকে না যায়!

৯৩. বোনের সঙ্গে দৌড়



মনে করা যাক তুমি মিনিটে 128 মিটার দৌড়াতে পার আর তোমার ছোট বোন দৌড়াতে পারে মিনিটে 64 মিটার। ধরা যাক তোমার ছোট বোন তোমার 128 মিটার সামনে রয়েছে এবং দু'জনেই সামনে দৌড়াতে শুরু করলে। তোমার উদ্দেশ্য ছুটে তোমার ছোট বোনকে ধরে ফেলা তোমার 128 মিটার যেতে সময় লেগেছে 1 মিনিট, সেই সময়ে তোমার বোন 64 মিটার সামনে চলে গিয়েছে। এই 64 মিটার যেতে তোমার লেগেছে $\frac{1}{2}$ মিনিট কিন্তু তার মাঝে তোমার ছোট বোন আরো 32 মিটার সামনে চলে গেছে। এই 32 মিটার যেতে তোমার লেগেছে $\frac{1}{4}$ মিনিট কিন্তু তার মানে সে আরও 16 মিটার চলে গেছে। এভাবে দেখানো যায় তুমি যখনই তার কাছে যেতে চাও সে আরও একটু এগিয়ে যায় অর্থাৎ তুমি কখনোই তাকে ধরতে পারবে না! যুক্তিতে ভুল কোথায়?

৯৪. কথার ধাঁধা

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics! এই ইংরেজি বাক্যটার মাঝে একটা গুরুত্বপূর্ণ তথ্য লুকানো আছে, সেটি কী?

[সাহায্য : নিউরনে অনুরণনে সেটি সম্পর্কে একাধিক সমস্যা দেয়া হয়েছে। ইচ্ছে করলে বাক্যটি আরো লম্বা করা যায় কিন্তু শব্দ সংখ্যা 32 হলে থেমে যেতে হবে।]

৯৫. বর্গমূলের ভেতর বর্গমূল...

যদি $x = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n\ldots}}}}$ হয় তাহলে কী কোনো পূর্ণসংখ্যা n এর জন্যে x পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে?

৯৬. আবারো ফিবোনাচি

আমরা ৩৫ নম্বর সমস্যায় ফিবোনাচি ক্রমের কথা বলেছিলাম যেখানে প্রথম দু'টি সংখ্যা হচ্ছে 1 এবং পরের সংখ্যাগুলো হচ্ছে আগের সংখ্যা দুটোর যোগফল, অর্থাৎ ফিবোনাচি ক্রম হচ্ছে—

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 অর্থাৎ প্রথম দুটোর পরে ফিবোনাচি সংখ্যার F_n হচ্ছে $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

এবারে সবগুলো সমস্যা দেয়া হলো ফিবোনাচি ক্রম দিয়ে। প্রমাণ কর প্রথম n সংখ্যক ফিবোনাচি সংখ্যার যোগফল হচ্ছে $F_{n+2} - 1$

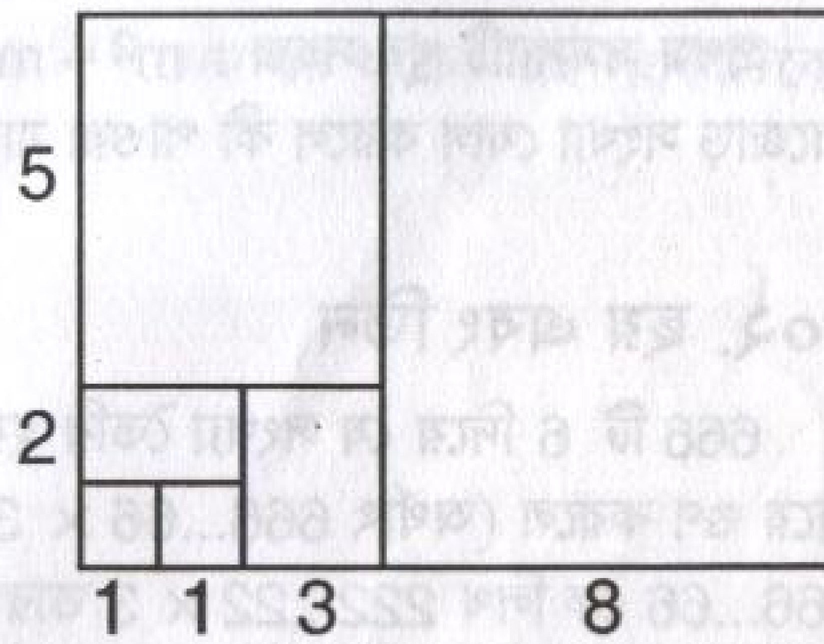
৯৭. সিঁড়িভাঙন যোগ সমান কত?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots}}}$$

৯৮. লুকানো ফিবোনাচি

৯৭ নম্বর সমস্যায় লুকিয়ে থাকা ফিবোনাচি ক্রম খুঁজে বের করতে পারবে?

৯৯. বর্গ এবং বর্গ



1 বাহুর দু'টি বর্গক্ষেত্রের উপর 2 বাহুর একটা বর্গক্ষেত্র আঁকা হয়েছে। যে আয়তক্ষেত্রটি তৈরি হয়েছে তার বড় বাহুটি 3, সেখানে 3 বাহুর একটা বর্গক্ষেত্র আঁকা হয়েছে এভাবে ক্রমাগত যাওয়া যেতে পারে, আমরা 8 পর্যন্ত গিয়ে থেমে গেছি। এখান থেকে বল

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \ldots F_n^2 = ?$$

১০০. ফিবোনাচির প্রমাণ

প্রমাণ কর $F^2_{n+1} = F_n F_{n+1} + (-1)^n$

১০১. মস্কো অলিম্পিয়াড

পরবর্তী পাঁচটি সমস্যা সবাই যেন ভালো করে দেখে, তার কারণ দু'টি, প্রথমত: অবশ্যই সমস্যাগুলো মজার, দ্বিতীয়ত: এই সমস্যাগুলো মস্কোর গণিত অলিম্পিয়াডে দেয়া হয়েছিল, যারা করতে পারবে তারা বুক ফুলিয়ে বলতে পারবে যে তারা মস্কোর গণিত অলিম্পিয়াডের সমস্যা সমাধান করেছে !

প্রথম সমস্যাটি খুব সহজ : $m^2 - m + 1$ থেকে $m^2 + m - 1$ পর্যন্ত সবগুলো বেজোড় সংখ্যা যোগ করলে কী পাওয়া যায় ?

১০২. ছয় এবং তিন

666 টি 6 দিয়ে যে সংখ্যা তৈরি হয় তাকে 666 টি 3 দিয়ে তৈরি সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে (অর্থাৎ 666...66 × 333...33) গুণফল কত হবে ? (সাহায্য 666...66 কে লিখ 222...22 × 3 তারপর চেষ্টা কর!)

১০৩. সোজা থেকেও সোজা

$a + b + c = 0$ হলে $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$ কত ? 0

১০৪. চতুর্মাত্রিক না দ্বিমাত্রিক

$\sqrt{a - \sqrt{a - x}} = x$ এর সমাধান বের কর।

[সাহায্য : এটি x এর জন্যে চতুর্মাত্রিক সমীকরণ কিন্তু a–র জন্যে দ্বিমাত্রিক। a–র দু'টি উৎপাদক বের করে সমীকরণটি নূতনভাবে লিখে সমাধান বের করা যেতে পারে]

১০৫. পরের অঙ্ক এখন

আমরা যদি 1 থেকে শুরু করে সবগুলো সংখ্যা এভাবে পরপর লিখতে শুরু করি

1234567891011121314... তা হলে 206 788তম অঙ্কটি কী ?

১০৬. আরো অলিম্পিয়াড

গতবার আমরা গণিত অলিম্পিয়াডের পাঁচটি সমস্যা দিয়েছিলাম, সবার উৎসাহ থাকতে থাকতে সত্যিকারের গণিত অলিম্পিয়াডের আরো পাঁচটি সমস্যা দেয়া যাক!

523 এর ডান পাশে এমন তিনিট অঙ্ক লিখ যেন ছয় অঙ্কের এই সংখ্যাটিকে 7,8 এবং 9 দিয়ে ভাগ করা যায়।

১০৭. যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ

যদি $a + b + c = 0$ হয় তাহলে

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = \text{কত ?}$$

১০৮. বড় নাকি ছোট

কোনটি বড় ? অন্যটি থেকে কত বড় সেটাও বলতে হবে।

$$\frac{2.0000000004}{(1.0000000002)^2+2.0000000004}$$

এবং $\frac{2.0000000002}{(1.0000000002)^2+2.0000000002}$

যাদের গুণতে অসুবিধে হচ্ছে– এখানে প্রতিবার দশমিকের পর দশটি করে শূন্য)!

১০৯. কোথায় উৎপাদক

$a^{10}+a^5+1$ এর উৎপাদক (factor) বের কর।

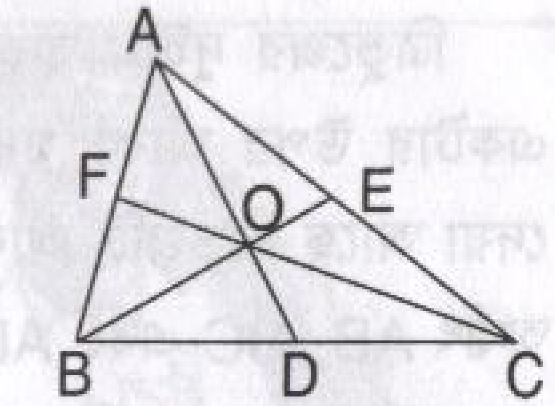
$(a^5+a^{5/2}+1)(a^5-a^{5/2}+1)$

১১০. ভাগফল ভাগশেষ

1946

চার অঙ্কের এমন একটি সংখ্যা বের কর যেটাকে 131 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 112 এবং 132 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 98।

১১১. ত্রিভুজের মজা



এবারের পাঁচটি সমস্যাই ত্রিভুজ নিয়ে। আরো সোজা করে বলা যায়— কেমন করে ত্রিভুজ আঁকা যায় তার উপর। ত্রিভুজের মতো সোজা ব্যাপার আর কী হতে পারে ? সেটা আঁকাও খুব সোজা, তবে সোজাসুজি আঁকতে না দিলে খানিকক্ষণ চিন্তা ভাবনা করতে হয়। আর আমাদের উদ্দেশ্য সেটা— একটা গাণিতিক সমস্যা নিয়ে চিন্তা ভাবনা করা। যারা সমাধানগুলো পাঠাবে তারা যেন ত্রিভুজটিকে বর্ণনা করার জন্যে এই রীতিগুলো মেনে চলে : ত্রিভুজটি হচ্ছে ABC ; তার তিনটি বাহু হচ্ছে AB, BC এবং CA; D, E এবং F হচ্ছে বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD, BE এবং CF হচ্ছে মধ্যমা যেগুলো O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। এবারে প্রথম সমস্যা দেয়া যাক : একটা ত্রিভুজের তিনটা বাহুর মধ্যবিন্দু (অর্থাৎ D, E এবং F) দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

১১২. বাহু নাকি মধ্যমা

ত্রিভুজের দু'টি বাহু এবং তৃতীয় বাহুর উপর আঁকা মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে। অর্থাৎ AB, BC এবং BE এর দৈর্ঘ্য জানা আছে, ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

১১৩. বাহু এবং মধ্যমা

ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর আঁকা মধ্যমা এবং তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য দেয়া আছে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে। অর্থাৎ BE, CF এবং BCএর দৈর্ঘ্য জানা আছে ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

[সাহায্য : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যখন পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে তখন একটি নিয়ম মেনে চলে, নিয়মটি কী ?]

১১৪. আবারো বাহু এবং মধ্যমা

ত্রিভুজের দুইটি বাহুর উপর আঁকা মধ্যমা এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেয়া আছে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে। অর্থাৎ AD, BE এবং BC দেয়া আছে, ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

১১৫. আবারো বাহু আবারো মধ্যমা

ত্রিভুজের দুইটা বাহু এবং এর একটার উপর আঁকা মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেয়া আছে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে। অর্থাৎ AB, BC এবং AD-এর দৈর্ঘ্য জানা আছে, ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

১১৬. সুন্দর কথা

এখানে তিনটা খুব সুন্দর কথা লিখা আছে। সুন্দর এবং ভালো জিনিস কষ্ট করে পেতে হয় কাজেই তোমাদেরকেও এই কথাগুলো কষ্ট করে বের করতে হবে। গোপন সংকেত ভেদ করে কথাগুলো বের কর।

(ক) CAJEQO EO KJA LANYAJP EJOLENWPEKJ WJZ JEJAPU–JEJA LANYAJP LANOLENWPEKJ

(খ) ZIQQHUV QHYHU TXLW DQG TXLWWHUV QHYHU ZLQ

(গ) NRFLNSFYNTS NX RTWJ NRUTWYFSY YMFS PSTBQJILJ

১১৭. নিঃশেষে ভাগ

1 ছাড়া অন্য কী কী পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 এবং 999 কে নিঃশেষে ভাগ করা যায়?

১১৮. আজব দেশ

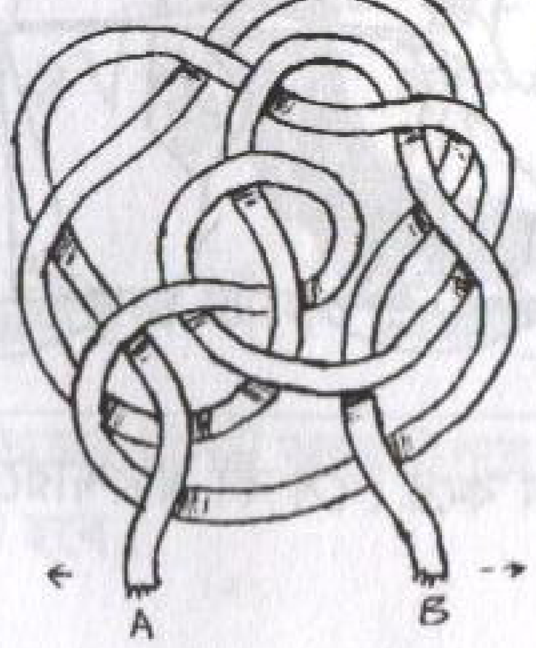
তুমি একটা আজব দেশে গিয়েছ সেখানে আমাদের দেশের মতো পাঁচ, দশ বা বিশ টাকার নোট নেই। নোটগুলো হচ্ছে 11, 12, 31, 33, 42 এবং 44 টাকার! সেই দেশে গিয়ে তুমি 100 টাকা দিয়ে একটা মজার অঙ্ক বই কিনেছ—সবচেয়ে কম সংখ্যক নোট দিয়ে দাম দিতে হলে কয় টাকার কয়টি নোট দেবে?

১১৯. অঙ্ক ক্লাব

তুমি একটা 'অঙ্ক ক্লাব' খুলেছ, তার মেম্বার হবার জন্যে একটা নিয়ম করেছে, নিয়মটা এরকম : পঞ্চাশটা লাল আর পঞ্চাশটা সবুজ বল দুইটা বাক্সের মাঝে ভাগাভাগি করে মিশিয়ে রাখবে। যারা মেম্বার হতে চায় তারা বাক্সগুলো থেকে একটা বল তুলবে। বলটি যদি সবুজ রঙয়ের হয় তাহলে মেম্বার হতে পারবে, লাল রঙয়ের হলে পারবে না। ক্লাব খোলার কয়দিন পরেই দেখলে যাদের অঙ্ক থেকে ব্যান্ড সংগীতে বেশি উৎসাহ তারাও মেম্বার হতে চাইছে। তুমি তাদের ক্লাবে নিতে চাও না। তাই অনেক চিন্তা ভাবনা করে তুমি একটা কায়দা করলে। যাদের ক্লাবে নিতে চাও তাদের বেলায় একটা বাক্সে রাখ একটা সবুজ বল বাকি 99টা বল রাখো অন্য বাক্সে। যাদের ক্লাবে নিতে চাও না তাদের বেলায় একটা বাক্সে রাখ একটা লাল বল, বাকি 99টা বল রাখো অন্য বাক্সে। অঙ্ক পিপাসুদের মেম্বার হবার সম্ভাবনা কত? ব্যান্ড সঙ্গীত পিপাসুদের মেম্বার হবার সম্ভাবনা কত?

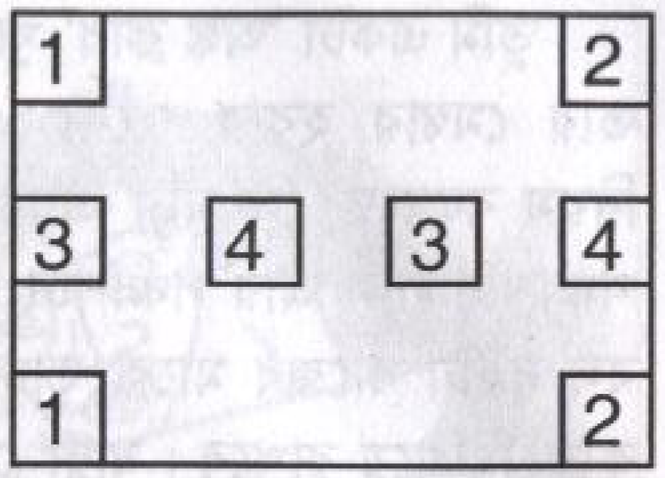
১২০. জট পাকানো দড়ি

পাশে একটা জট পাকানো দড়ির ছবি দেয়া আছে। দড়ির A এবং B অংশ দুই পাশে টেনে ধরলে দড়িটি সবচেয়ে কম জট পাকানো অবস্থায় কেমন দেখাবে?



১২১. প্যাঁচানো রেখা

রেখা এঁকে এমন ভাবে 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3 এবং 4 – 4 যোগ কর যেন কোনো রেখাই আয়তক্ষেত্রের বাইরে না যায় এবং একটা রেখা আরেকটা রেখার উপর দিয়ে না যায়।



১২২. পাই এবং নিউটন

π–এর মান বের করার জন্যে নিউটন এই ধারাটি ব্যবহার করেছিলেন :

$$p = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

নিউটন দশমিকের পর 16 ঘর পর্যন্ত বের করার জন্যে এই সিরিজের কয়টি Term নেয়ার প্রয়োজন হয়েছিল ?

১২৩. অঙ্ক দিয়ে অঙ্ক

কোনো ক্ষুদ্রতম সংখ্যার শেষের অঙ্ককে সমানে বসালে সংখ্যাটি মূল সংখ্যার দ্বিগুণ হবে ?

১২৪. চাল ব্যবসায়ীর সমস্যা

একজন চাল ব্যবসায়ীর দাড়িপাল্লায় সমস্যা আছে– (যেখানে থেকে ঝোলানো হয় সেখান থেকে দুই প্রান্তের দৈর্ঘ্য সমান নয়), ব্যবসায়ীটি সৎ, সে কাউকেই ঠকাতে চায় না কাজেই যখনই চাল বিক্রি করতে হয় সে দু'বারে ওজন করে। একবার অর্ধেক ওজনের বাটখারাটি এক পাশে রেখে ওজন করে, আরেকবার অন্য পাশে রেখে ওজন করে। সে কী খরিদ্দারদের ঠিক পরিমাণ, বেশি নাকি কম চাল দিচ্ছে ?

১২৫. পুকুরপাড়ে গাছ

একটা বর্গাকার পুকুরের চারকোনায় চারটি গাছ সেই পুকুরে মাছের চাষ করা হয়। তুমি আরো বেশি মাছের চাষ করার জন্য পুকুরটা আরো বড় করতে চাইছ, কিন্তু তুমি পরিবেশ নিয়ে ভাবনা চিন্তা কর বলে কিছুতেই গাছগুলো কাটতে চাও না। গাছগুলোকে না কেটে, পুকুরটার আকার বর্গাকৃতি রেখে এটাকে কত বড় করা সম্ভব ? দ্বিগুণ

১২৬. ছক পূরণ

1 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্ক ব্যবহার করে এই ছকটি পূরণ কর।

9 – 5 = 4
×
6 ÷ 3 = 2
=
1 + 7 = 8

১২৭. সাত দিয়ে ভাগ

প্রমাণ কর $n^7 - n$ কে সব সময় 7 দিয়ে ভাগ করা যায়।

$n(n^3+1)(n^3-1)$

১২৮. দুইয়ের মজা

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$ সমান কত ? $\sqrt[3]{4}$

১২৯. ত্রিভুজ আঁকা

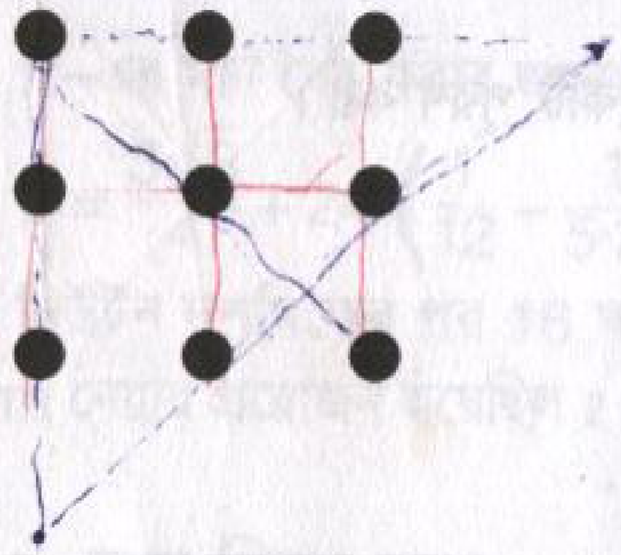
ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপরে আঁকা লম্বের পাদবিন্দুগুলো দেয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

১৩০. সমকোণী ত্রিভুজ

একটা সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে বড় বাহুর দৈর্ঘ্য 76149513 অন্য দুটো বাহুর দৈর্ঘ্য কী হতে পারে ? (বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে।)

১৩১. নয় বিন্দু

চারটি রেখা টেনে এই নয়টা বিন্দুকে জুড়ে দিতে হবে।



১৩২. সবচেয়ে ছোট

1 থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো অঙ্ক ব্যবহার করে তিন অঙ্কের এমন তিনটি সংখ্যা তৈরি কর যেন তাদের গুণফলটি হয় সম্ভাব্য সবচেয়ে ছোট একটি সংখ্যা।

১৩৩. লম্ব থেকে ত্রিভুজ

ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর আঁকা লম্বের দৈর্ঘ্য দেয়া আছে ত্রিভুজটা আঁকতে হবে।

১৩৪. অর্ধেক অর্ধেক

দু'জনে মিলে এক বোতল কোল্ড ড্রিংকস কিনেছ– ঠিক করেছ প্রথমজন অর্ধেক খেয়ে দ্বিতীয়জনকে দেবে। কোনো ভাবে না মেপে কীভাবে ঠিক করবে ঠিক অর্ধেক খাওয়া হয়েছে ?

১৩৫. হরতালে হাঁটা

কোনো এক হরতালের দিনে তুমি 24 কিলোমিটার হেঁটে গিয়েছ। যাবার সময় তোমার বেগ (speed) ছিল ঘন্টায় 6 কিলোমিটার। আসার সময় ক্লান্ত ছিল বলে গতিবেগ (speed) ছিল ঘন্টায় 4 কিলোমিটার। তোমার গড় বেগ কত ছিল ?

১৩৬. সাদা লাল নীল

তোমাকে দু'টি সাদা, দু'টি লাল এবং দু'টি নীল বল দেওয়া হয়েছে, প্রত্যেকটি রঙয়ের মাঝেই একটা হালকা এবং অন্যটি ভারী। সবগুলো হালকা বলের ওজন সমান আবার সবগুলো ভারী বলের ওজন সমান। একটা দাঁড়িপাল্লা ব্যবহার করে মাত্র দু'বার ওজন করে ভারী এবং হালকা বলকে আলাদা করতে হবে।

১৩৭. সবচেয়ে বড়

1 থেকে 9 পর্যন্ত সবগুলো অঙ্ক ব্যবহার করে তিন অঙ্কের এমন তিনটি সংখ্যা বের কর যেন তার গুণফল সম্ভাব্য সবচেয়ে বড় সংখ্যা হয়।

১৩৮. বৃত্তকে ভাগ

একটা বৃত্তকে 3, 4 এবং 5টি সরল রেখা টেনে সবচেয়ে বেশি কতগুলো টুকরো করা সম্ভব ?

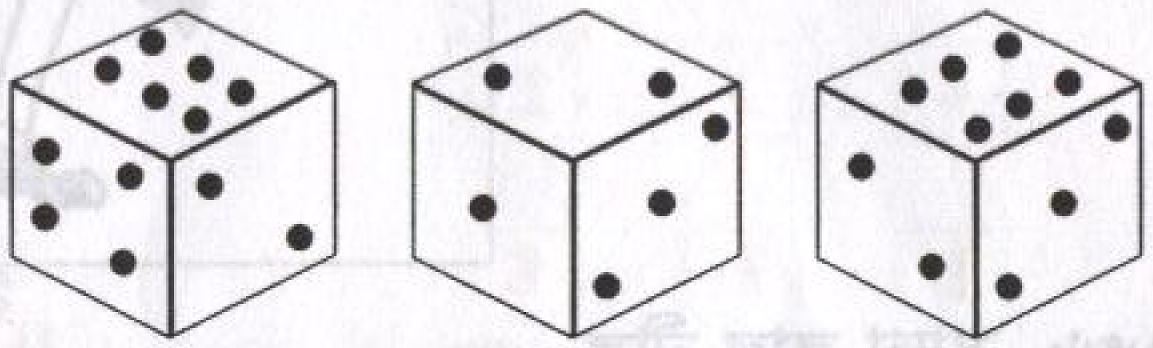
১৩৯. একশ চাই

1 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো ক্রমানুসারে এমনভাবে লিখে যোগ কিংবা বিয়োগ কর যেন তার উত্তর 100 হয়। (যেমন $123 - 45 - 6 + 7 + 8 + 9$ লিখলে আমরা পাই 96, এটি সঠিক হয় নি, 100 পেতে হবে)

১৪০. ছেলে এবং মেয়ে

চারটা ছেলে এবং তিনটি মেয়ে তাদের স্কুলে এসে একটা বেঞ্চে বসে। কে কোথায় বসবে তার কোনো নিয়ম নেই– বেঞ্চের দুই পাশে দুইজন ছেলেকে পাওয়ার সম্ভাবনা কত ?

১৪১. গোলমালের ছক্কা



বন্ধুর সাথে লুডো খেলতে গিয়ে তোমার মনে হলো এই ছক্কার মাঝে বড় ধরনের গোলমাল আছে ! প্রথম তিনটি চাল এরকম দেখেই তুমি নিঃসন্দেহ হয়ে গেলে। গোলমালটি কী ?

১৪২. পূর্ণ বর্গ

দুই অঙ্কের এমন একটি সংখ্যা বের কর যেন সেগুলো উল্টো দিয়ে সংখ্যাটির সাথে যোগ করলে সেটি পূর্ণ বর্গ হয়। যেমন $29 + 92 = 121 = 11^2$ (এরকম সব মিলিয়ে আটটি সংখ্যা আছে যার একটি বলে দেয়া হলো বাকি 7টি বের করতে হবে) 38, 47, 56, 65, 74, 83 = 7টি.
এবং 29, 92

১৪৩. কতগুলো প্রাইম

101, 10101, 1010101 এই সিরিজে কয়টি প্রাইম নাম্বার আছে ?

(সাহায্য : k তম সংখ্যাটিকে এভাবে লেখা যায় : $100^0 + 100^1 + 100^2 + 100^3 .... 100k-1 + 100^k$ এই সংখ্যাটি বের করে শুরু কর)

১৪৪. ম্যাচ কাঠির খেলা

টেবিলের মাঝে বেশ কিছু ম্যাচের কাঠি ছড়িয়ে দিয়ে দু'জনে মিলে একটা মজার খেলা শুরু করা যায়। খেলার নিয়মটা খুব সহজ দু'জনে পালা করে ম্যাচের কাঠি তুলবে, একবারে একটি বা দু'টি তুলতে পারবে এবং যে শেষ কাঠিগুলো তুলে টেবিল খালি করে দিতে পারবে সে হচ্ছে বিজয়ী। মনে করা যাক টেবিলে কাঠি আছে চল্লিশটি এবং তুমি প্রথম কাঠি তুলবে, তুমি ঠিক কয়টা কাঠি তুলে কী করলে খেলাতে জিতে যাওয়া নিশ্চিত হবে ?

১৪৫. বালতিতে পানি

একটা প্লাস্টিকের বালতির উপরের ব্যাস 36 সেন্টিমিটার বালতিটির নিচের ব্যাস 30 সেন্টিমিটার এবং এর উচ্চতা 24 সেন্টিমিটার, বালতিতে কয় লিটার পানি রাখা যাবে ?

১৪৬. রঙচঙয়ে কিউব

একটি রঙচঙয়ে কিউব তিনভাবে দেখলে ছবির মতো তিন রকম দেখায়। হলুদের বিপরীত দিকের রঙটি কী ?

১৪৭. নিঃশেষে নয়

প্রমাণ করা যে n সংখ্যাটি যতই হোক না কেন $n^2 + 3n + 5$ কে কখনোই 121 দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যাবে না।

(সাহায্য : $n^2 + 3n + 5$ কে $(n + 7)(n - 4) + 33$ হিসেবে লিখ এবং লক্ষ কর $(n + 7) - (n - 4) = 11$)

১৪৮. ভাগের মজা

দশ অঙ্কের এমন একটা সংখ্যা বের কর যেন (বাম দিক থেকে শুরু করে) প্রথম সংখ্যাটি 1 দিয়ে বিভাজ্য, প্রথম দু'টি 2 দিয়ে বিভাজ্য, প্রথম তিনটি 3 দিয়ে বিভাজ্য, প্রথম চারটি 4 দিয়ে বিভাজ্য এবং এভাবে একেবারে শেষ পর্যন্ত যাওয়া যায় যেন পুরো অঙ্কটি 10 দিয়ে বিভাজ্য।

১৪৯. ক্রিকেট ক্লাব

একটা স্কুলের শতকরা 25 ভাগ মেয়ে এবং 60 ভাগ ছেলে ক্রিকেট ক্লাবে যোগ দিয়েছে। ক্রিকেট ক্লাবের শতকরা 20 ভাগ হচ্ছে মেয়ে। স্কুলের মোট ছেলেমেয়ের সংখ্যা শতকরা কত ভাগ ক্রিকেট ক্লাবে যোগ দিয়েছে?

১৫০. বর্গ এবং বর্গ

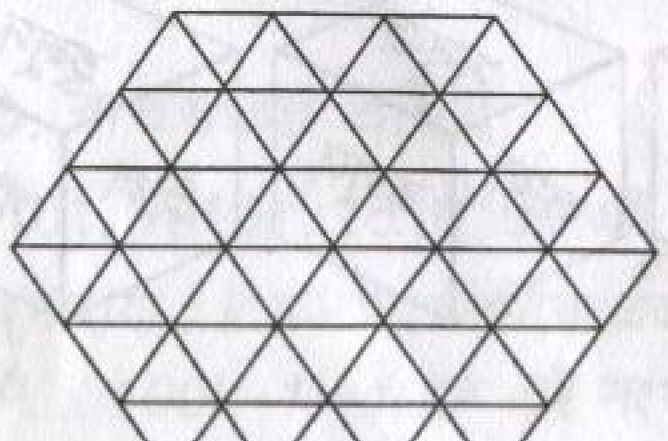
এক জায়গায় বেশ কিছু বর্গক্ষেত্র পাওয়া গেছে তাদের ক্ষেত্রফল গুলো হচ্ছে:
49, 4489, 444 889, 44 448 889

এগুলো খানিকক্ষণ মন দিয়ে লক্ষ কর। এখন বলো একটা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যদি হয় 44 444 448 888 889

তা হলে সেই বর্গক্ষেত্রের বাহুটির দৈর্ঘ্য কত?

১৫১. সমষড়ভুজ

পাশের ছবিতে সব মিলিয়ে কয়টি সমষড়ভুজ আছে?



১৫২. ত্রিভুজ

আগের ছবিতে সব মিলিয়ে কয়টি সমবাহু ত্রিভুজ আছে?

১৫৩. আবারো পাই

আমরা মাঝে মাঝেই π-এর মান বের করার জন্যে মজার মজার সিরিজ দেই। 122 নং সমস্যায় নিউটনের একটি সিরিজ দেয়া হয়েছিল, এখানে তার আরো একটি সিরিজ দেয়া হলো।

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3.}{2.4.5.2^5} + \dots\right)$$

এই সিরিজ বের করে দশমিকের পর দশ ঘর পর্যন্ত বের করতে আনুমানিক কয়টি term নিতে হবে?

১৫৪. সব এক্স সব ওয়াই

সম্ভাব্য সবগুলো x এবং y বের কর যেন $x + y = xy$ হয়।

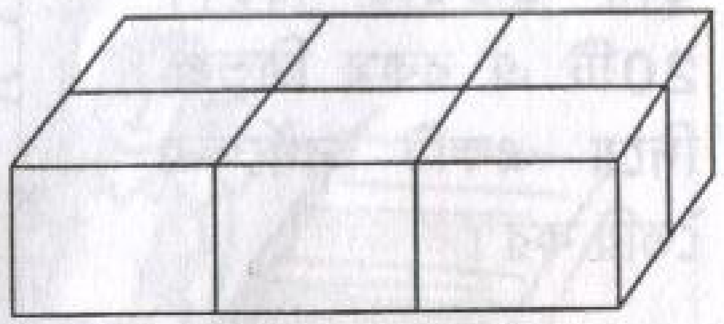
১৫৫. অনুমানের জোর

x যদি একটা পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে নিচের সমীকরণটি সমাধান কর:
$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3024$

[সাহায্য : অনুমান করার চেষ্টা কর]

১৫৬. রশি এবং বাক্স

তোমার কাছে 360 cm লম্বা একটা রশি, সেটা দিয়ে ছবিতে যেভাবে দেখানো হয়েছে সেভাবে একটা বাক্স বাধতে হবে। সবচেয়ে বড় আয়তনের বাক্সটি কত বড় হবে?

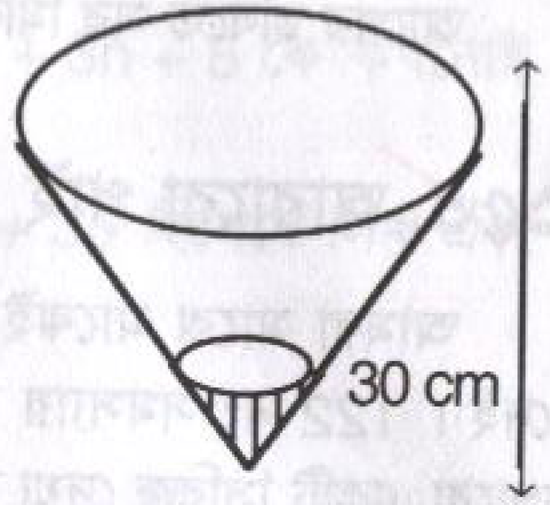


১৫৭. কত বড় ভাগ

প্রমাণ কর : $11^{10} - 1$ কে 10 দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়।

১৫৮. মূর্তি

দুটো ধাতব মূর্তি দেখতে হুবহু একই রকম একটার উচ্চতা 4cm অন্যটি 6cm, যদি ছোট মূর্তিটার ওজন হয় 30gm তাহলে বড়টার ওজন কত ?



১৫৯. কোণের ভেতর পানি

30 cm উঁচু একটা cone এর ভেতরে এক কাপ পানি ঢালার পর পানির উচ্চতা হলো 10 cm পুরো cone-টি ভর্তি করার জন্যে কয় কাপ পানি লাগবে ?

১৬০. ত্রিভুজ দিয়ে বর্গ

তোমরা সবাই দেখেছ বর্গাকৃতি টাইলস দিয়ে ঘরের মেঝে ঢেকে দেয়া হয়। ধরা যাক তোমার ঘরটি বর্গাকৃতির কিন্তু টাইলগুলো সমকোণী ত্রিভুজের আকারের যে ত্রিভুজটির ভূমি উচ্চতার দ্বিগুণ। 20টি এ রকম ত্রিভুজ দিয়ে একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি কর।

১৬১. তারকার গুণ

এই গুণ অঙ্কটিতে তারকা চিহ্নিতে ব্যবহৃত সবগুলো সংখ্যা প্রাইম সংখ্যা (2,3,5 এবং 7)। পুরো গুণ অঙ্কটি কী উদ্ধার করতে পারবে ?

```
    * * *
      * * X
  ---------
  * * * *
* * * *
-----------
* * * * *
```

১৬২. বড় নাকি ছোট

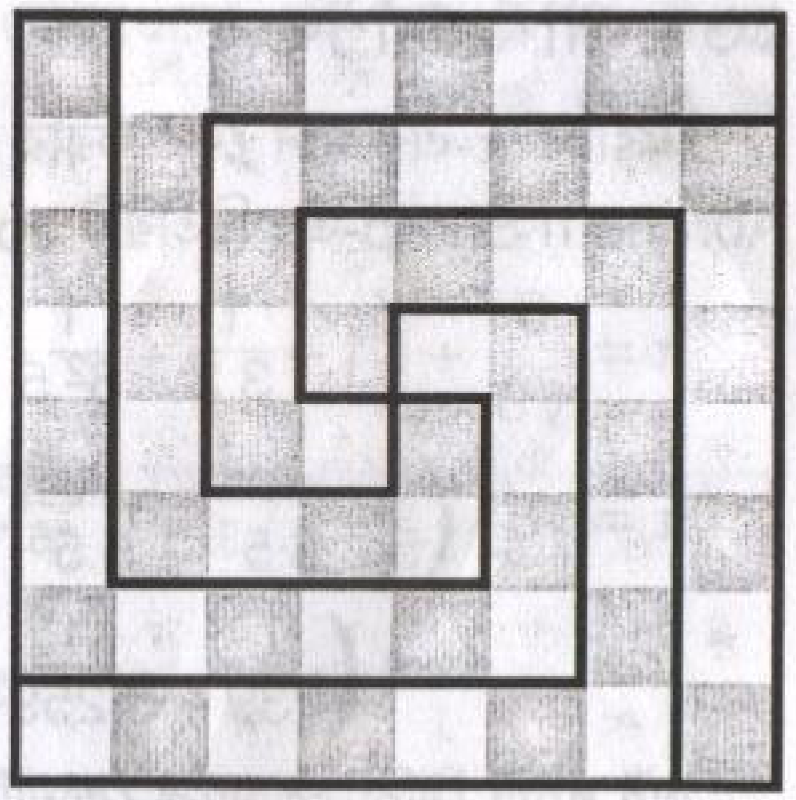
n যদি 50 থেকে বেশি হয় তাহলে কোন সংখ্যাটি বড় $99^n + 100^n$ নাকি 101^n ?

১৬৩. ঘড়ির কাঁটা

সন্ধে ছয়টার পর তুমি বন্ধুর বাসায় যাচ্ছ, ঘড়ির দিকে তাকিয়ে দেখলে ঘণ্টার কাঁটা আর মিনিটের কাঁটা পরস্পরের সাথে 110° ডিগ্রি কোণ করে আছে। সাতটার আগেই তুমি নিজের বাসায় ফিরে এসেছ, ঘরে ঢুকে ঘড়ির দিকে তাকিয়ে দেখলে কী আশ্চর্য ঘণ্টার কাঁটা এবং মিনিটের কাঁটা আবার 110 ডিগ্রি কোণ করেছে। তুমি কতক্ষণ বাসার বাইরে ছিলে ?

১৬৪. দাবার বোর্ড

ছবিতে একটি দাবার বোর্ডকে তার কেন্দ্রের সাপেক্ষে চার ভাগে ভাগ করে দেখানো হয়েছে। একইভাবে দাবার বোর্ডকে চার খণ্ডে ভাগ করতে পারবে যেন প্রত্যেকটি খণ্ডেই সাদা ঘর কালো ঘর থেকে কিংবা কালো ঘর সাদা ঘর থেকে দ্বিগুণ থেকেও বেশি হয় ?

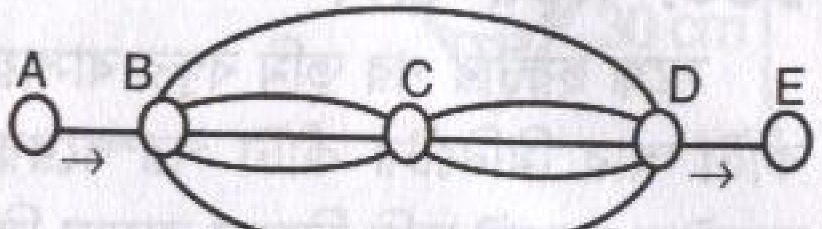


১৬৫. চলন্ত সিঁড়ি

তুমি এবং তোমার বন্ধু কোনো একটি শপিং কমপ্লেক্সে গিয়েছে সেখানে পাশাপাশি দুটো এস্কেলেটর বা চলন্ত সিঁড়ি নিচে নামছে। তুমি ভদ্র মানুষের মতো হেঁটে হেঁটে নেমেছ বলে সব মিলিয়ে পঞ্চাশটি কদম বা ধাপ নেমেছ। তোমার বন্ধু

অস্থির ধরনের সে হুড়োহুড়ি করে নেমেছে তুমি একধাপ নামতেই সে তিন ধাপ নেমে গেছে বলে তাকে পঁচাত্তর ধাপ নামতে হয়েছে। এস্কেলেটর যদি থেমে থাকে তাহলে তাতে কয়টি ধাপ দেখা যাবে?

১৬৬. রেল জংশন



A এবং E দুই প্রান্তের রেল স্টেশন, মাঝখানে B, C এবং D জংশন স্টেশন। একটি রেল পথে একবারের বেশি না গিয়ে কথাগুলো ভিন্ন উপায়ে A থেকে E-তে যাওয়া সম্ভব?

১৬৭. শার্প মেশিন

এখানে π-এর মান বের করার জন্যে দুটি সিরিজ দেয়া হয়েছে, প্রথমটি Abraham Sharp-এর দ্বিতীয়টি John Machin-এর

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} + \cdots\cdots\right)$$

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \cdots\cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \cdots\cdots\right)$$

এই দুইটি সিরিজের মাঝে কোনটি ব্যবহার করে দ্রুত π-এর মান দশমিকের পর বেশি ঘর বের করা যাবে এবং কেন?

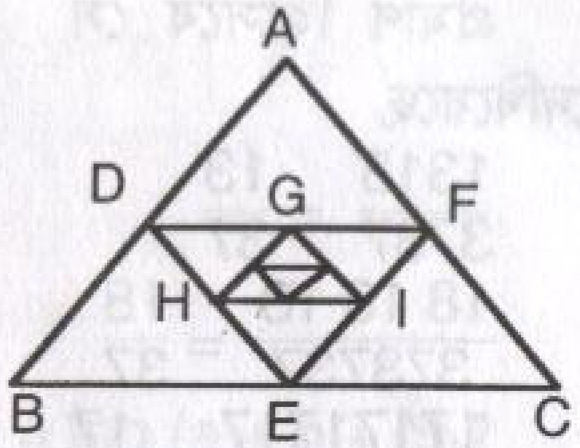
১৬৮. ছোট নাকি বড়

$(1.000001)^{1000,000}$ এবং 2 এর মাঝে কোনটি বড়?

১৬৯. অঙ্কের ওলট-পালট

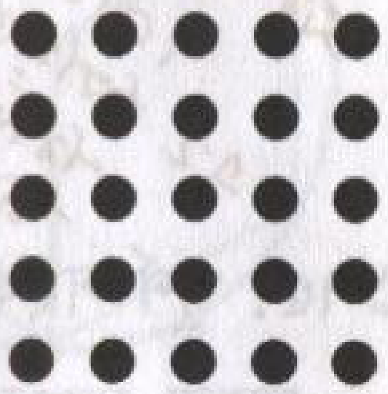
দুই অঙ্কের একটা সংখ্যার সাথে 36 যোগ করা হলে অঙ্ক দু'টি উল্টে যায়। একক অঙ্কটি দশক অঙ্কটির দ্বিগুণ থেকেও এক বেশি। সংখ্যাটি কত?

১৭০. ত্রিভুজের ভেতর ত্রিভুজ



ABC একটা ত্রিভুজ তার তিনটি বাহু হচ্ছে a,b এবং c ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করে DEF আঁকা হলো, এই ত্রিভুজের তিন বাহু যোগ করে GHI আঁকা হলো। এভাবে যদি যতগুলো সম্ভব ত্রিভুজ আঁকা হয় তাহলে সবগুলো ত্রিভুজের সবগুলো বাহুর যোগফল কত?

১৭১. সারি সারি বিন্দু



পাশে 5×5 বিন্দুর সারি দেয়া আছে, এর মাঝে কয়টা বর্গক্ষেত্র আঁকা যাবে যেন বর্গক্ষেত্রের কোনাগুলো এই বিন্দুতে থাকে?

১৭২. বিন্দু এবং রেখা

এই 5×5 বিন্দুর সারিকে আটটি ধারাবাহিক সরলরেখা দিয়ে সংযুক্ত করতে পারবে?

১৭৩. ভাগের রহস্য

প্রমাণ কর কোনো সংখ্যা যদি 3^n সংখ্যক একই অঙ্ক দিয়ে তৈরি হয় তাহলে সেটাকে 3^n দিয়ে ভাগ করা যায়। অর্থাৎ 222 কে 3 দিয়ে ভাগ করা যাবে 777,777,777 কে 9 দিয়ে ভাগ করা যাবে, ইত্যাদি।

১৭৪. পাগলা গণিত

তোমাদের ক্লাশের পাগলা টাইপের একজন ছেলে এসে ঘোষণা করল সে নূতন এক ধরনের গণিত আবিষ্কার করেছে। যদি কোনো ভগ্নাংশে উপরে এবং নিচে সমান সংখ্যক অঙ্ক থাকে তাহলে প্রথম এবং শেষ দু'টি অঙ্ক রেখে বাকিগুলো কাটাকাটি করে ফেলা যায়।

প্রমাণ হিসেবে সে দেখিয়েছে

$$\frac{1313}{3737} = \frac{13}{37}$$

$$\frac{18\,18\,18}{373737} = \frac{18}{37}$$

$$\frac{17171717}{23232323} = \frac{17}{23}$$

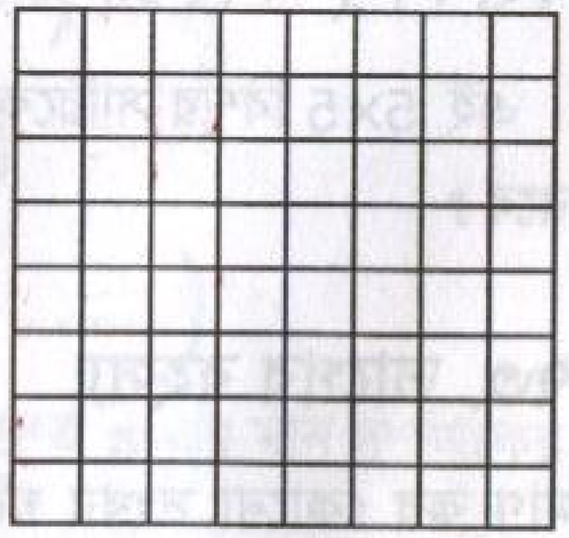
ব্যাপারটা কী বলতে পারবে ?

১৭৫. পূর্ণ সংখ্যার খোঁজে

সম্ভাব্য সবগুলো পূর্ণসংখ্যা n বের কর যেন n>1 হলে $\frac{2^n+1}{n^2}$ একটি পূর্ণসংখ্যা হয়।

১৭৬. কতগুলো বর্গক্ষেত্র

পাশের ছবিতে তুমি সব মিলিয়ে কয়টি বর্গক্ষেত্র খুঁজে পাবে ?



১৭৭. আয়তক্ষেত্রের খোঁজে

বর্গক্ষেত্র খুঁজে পাওয়া মনে হয় সোজা-কতগুলো আয়তক্ষেত্র এই ছবিতে খুঁজে পাবে ? মনে রেখো বর্গক্ষেত্রগুলো কিন্তু এক ধরনের আয়তক্ষেত্র!

১৭৮. শূন্য এবং শূন্য

$n! = 1\times2\times3\times4..\,(n-1)\times n$ তা হলে 100! সংখ্যাটির শেষে কতগুলো শূন্য থাকবে ?

১৭৯. গ্রাফের ছবি

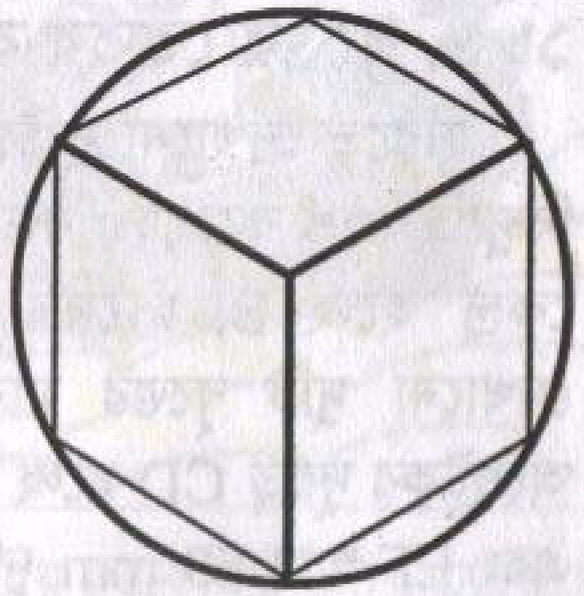
$y = \left|\frac{1}{x}\right|$ গ্রাফটি কাগজে এঁকে দেখাও।

১৮০. গুণ সমান যোগ

a, b এবং c-এর কোন মানের জন্যে $\log(abc) = \log(a+b+c)$?

১৮১. গোলকে কিউব

500 mm ব্যাসের একটি গোলকের ভেতর সবচেয়ে বড় যে কিউবটি বসানো যায় তার ভেতরে সবচেয়ে বড় যে গোলক বসানো যায় সেই গোলকের আয়তন (volume) 500 mm গোলকের আয়তন থেকে কত ছোট ?



১৮২. পূর্ণবর্গ

প্রমাণ কর যে পরপর পাঁচটি সংখ্যার বর্গ যোগ করলে সেটি কখনোই কোনো সংখ্যার পূর্ণবর্গ হবে না।

[সাহায্য : পরপর পাঁচটি সংখ্যার যোগফল $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2)$]

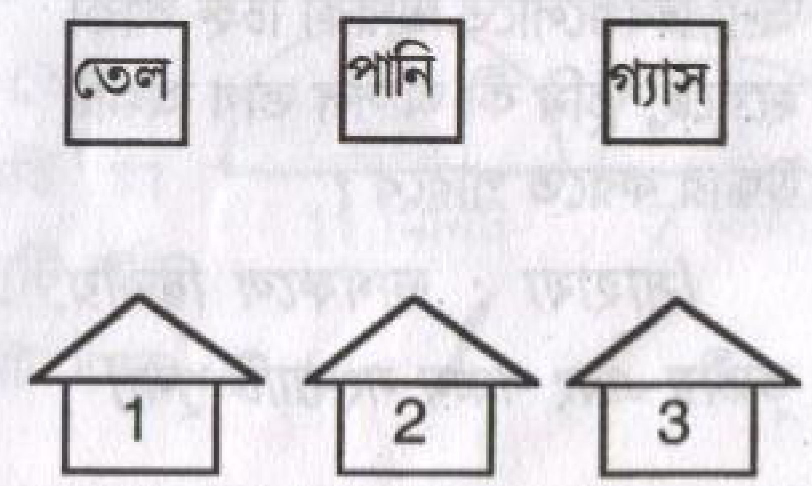
১৮৩. দেখতে কেমন

$y = |(2-x)(4+x)|$

গ্রাফটি এঁকে দেখাও। গ্রাফটি x এবং y অক্ষকে ছেদ করলে বিন্দুগুলির co-ordinateগুলো দেখাও।

১৮৪. তেল পানি গ্যাস

1,2 এবং 3 বাসাতে তেল পানি এবং গ্যাস সরবরাহ করতে হবে। এমনভাবে কী তেল পানি এবং গ্যাসের পাইপ বসানো যাবে যেন একটির উপর দিয়ে আরেকটিকে যেতে না হয় ?



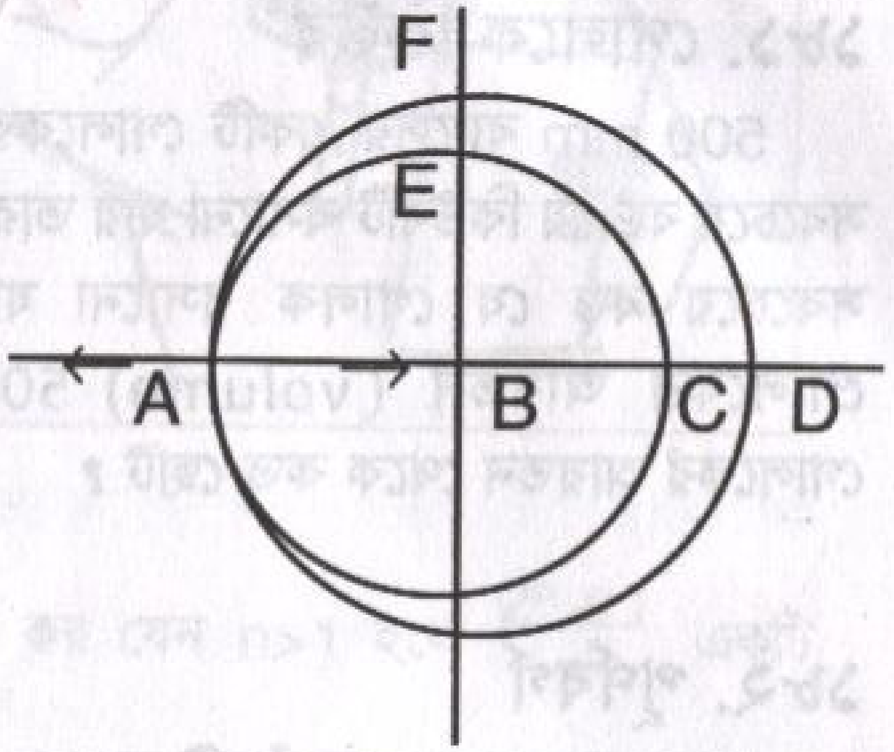
১৮৫. আরো বেশি কিছু

১৭১ নম্বর সমস্যায় 5×5 বিন্দু এঁকে তার মাঝে কয়টি বর্গক্ষেত্র আঁকা যায় যেন বর্গক্ষেত্রের কোনাগুলো কোন একটি বিন্দুতে থাকে জানতে চাওয়া হয়েছিল। যদি n×n বিন্দু থাকে তাহলে বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা কত হবে ?

২৫

১৮৬. বৃত্তের ভেতর বৃত্ত

ছবিতে দেখানো দুটো বৃত্ত A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। বড় বৃত্তটির কেন্দ্র হচ্ছে B, চাঁদের মতো দেখানো দুটি বৃত্তের মাঝখানের অংশটুকুর দূরত্ব CD হচ্ছে 90 mm এবং EF হচ্ছে 50 mm. দুটি বৃত্তের ব্যাস কত ?



১৮৭. দাবার বোর্ডে রহস্য

দাবার বোর্ডে একটা সাদা ঘরের ঠিক মাঝখানের বিন্দুকে কেন্দ্র ধরে সবচেয়ে বড় একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যেন সেটি সবসময় সাদা ঘরগুলোতে থাকে। বোর্ডের ঘরগুলো যদি 50 mm×50 mm হয় তাহলে এই বৃত্তটির ব্যাস কত হবে?

১৮৮. গোলমেলে ভাগ

এই ভাগ অঙ্কে চারটি ছাড়া অন্য সবগুলোতে তারকা চিহ্ন আঁকা হয়েছে, তুমি কী আসল ভাগ অঙ্কটি উদ্ধার করতে পারবে ?

[সাহায্য : ভাগফলে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং পঞ্চম সংখ্যাটি শূন্য]

```
*** ) 5******** ( *******
      ***
      ----
       ****
        ***
       ----
         5**
         ***
        ----
        *5**
        ****
        ----
           0
```


১৮৯. বনবিভাগের স্পিডবোট

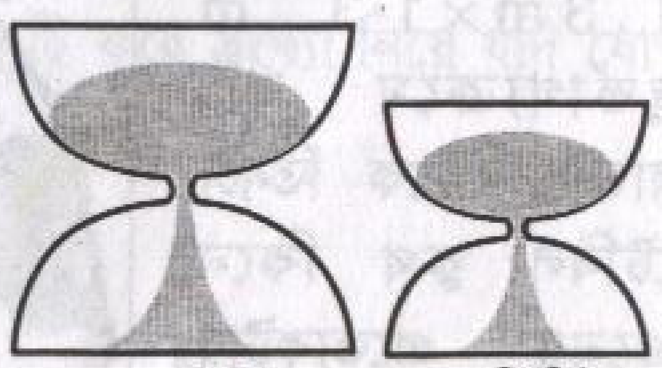
বন বিভাগের কর্মকর্তাদের স্পিড বোটে করে তাদের অফিস থেকে স্রোতের বিপরীত দিকে নির্দিষ্ট দূরত্বে গিয়ে আবার স্রোতের অনুকূলে আগের জায়গা পার হয়ে বেশ খানিকটা চলে গিয়ে স্পিড বোট ঘুরিয়ে স্রোতের বিপরীত দিকে নিজেদের অফিসে ফিরে আসতে হয়। একদিন নদীর স্রোত হঠাৎ খুব বেড়ে গেল– বন বিভাগের কর্মকর্তাদের সময় কী এখন বেশি লাগবে, কম লাগবে না আগের মতোই লাগবে ?

১৯০. বর্গ এবং কিউব

সবচেয়ে ছোট দুটি পূর্ণ সংখ্যা বের কর যেন তাদের বর্গের পার্থক্য হচ্ছে কিউব এবং কিউবের পার্থক্য হচ্ছে বর্গ। অর্থাৎ m,n এবং p,q পূর্ণ সংখ্যা হলে $m^2 - n^2 = p^3$ এবং $m^3 - n^3 = q^2$

১৯১. বালুঘড়ি

এক সময়ে বালুঘড়ির প্রচলন ছিল যেখানে উপর থেকে সব বালু একটা নির্দিষ্ট সময়ে নিচে এসে পড়তো। মনে করা যাক তোমার এরকম দু'টি বালুঘড়ি আছে, একটি 11 মিনিটের অন্যটি 7 মিনিটের। এই দুটি ঘড়ি ব্যবহার করে কীভাবে ঠিক 15 মিনিট সময় নির্ধারণ করবে ?



11 মিনিট   7 মিনিট

১৯২. বড়র মাঝে ছোট

1000^{1000} এবং 101^{999} এর মাঝে কোনটি বড় ?

১৯৩. গ্রাফ এবং গ্রাফ

$y = |x|^2 - 2|x|$ গ্রাফটি এঁকে দেখাও। গ্রাফটি x এবং y অক্ষে ছেদ করলে সেই বিন্দুগুলির co-ordinate কত ?

১৯৪. ঘড়ির কাঁটা

4টা এবং 5টার মাঝে ঠিক কখন ঘন্টার কাঁটা এবং মিনিটের কাঁটা একটা আরেকটার উপর থাকবে ?

১৯৫. পিঁপড়া এবং মধু

200mm উঁচু এবং 300mm পরিধির একটা টিউবের ভিতরে উপর থেকে 50mm নিচে এক ফোঁটা মধু। ঠিক তার বিপরীত দিকে টিউবের বাইরে নিচ থেকে 50mm উপরে একটা পিঁপড়া। পিঁপড়াটা সবচেয়ে কম কত দূরত্ব অতিক্রম করে মধু বিন্দুর কাছে যেতে পারবে।

[সাহায্য : টিউবটাকে খুলে মেলে দিয়ে চেষ্টা কর।]

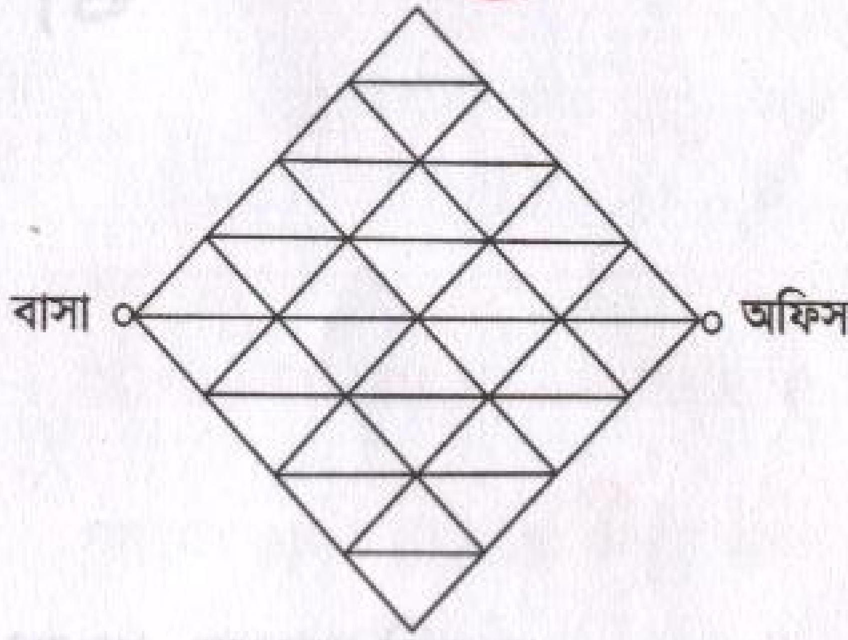
১৯৬. টেবিল ক্লথ

তোমার টেবিলটি বর্গাকার, তার ক্ষেত্রফল হচ্ছে $1.3\,m \times 1{\cdot}3\,m$ দুর্ভাগ্যক্রমে তুমি বাজার থেকে তিনটা টেবিল ক্লথ কিনে এনেছ প্রত্যেকটার সাইজ 1m×1m তুমি কী পুরো টেবিলটা ঢাকতে পারবে ? যদি না পার তাহলে সবচেয়ে বড় কোন আকারের বর্গাকৃতি টেবিল ঢাকতে পারবে ?

১৯৭. ভাগফল

$a^{128} - b^{128}$ কে $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) \times (a^{32} + b^{32})(a^{64} + b^{64})$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল কত হবে ?

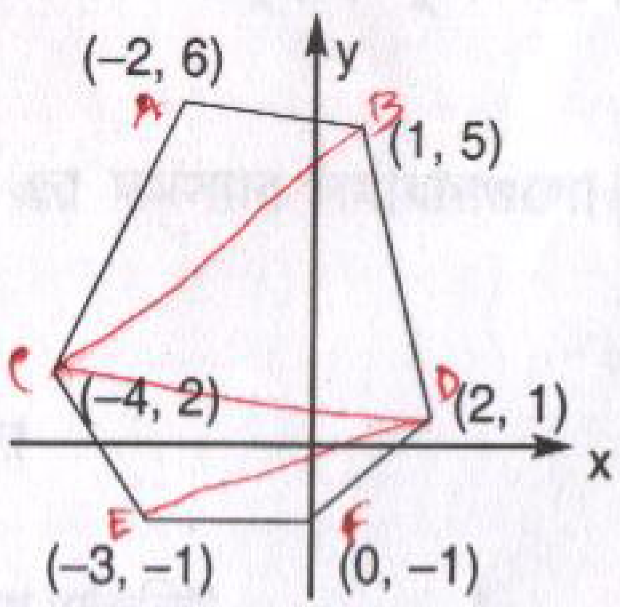
১৯৮. অফিসগামী মানুষ



একজন মানুষ তার বাসা থেকে অফিসে যাবার জন্যে এক একদিন এক-একটা পথ বেছে নিতে পছন্দ করে। ছবিতে তার বাসা এবং অফিসের মাঝখানের রাস্তাগুলো দেখানো হয়েছে সে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন পথে অফিসে যেতে পারবে ?

১৯৯. বহুভুজ

পাশে দেখানো বহুভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?



২০০. ক্ষেত্রফল জোড়

1 থেকে 100 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মাঝে দু'টি করে সংখ্যা নিয়ে যদি যোগ করা হয় তাহলে কতগুলো যোগফল জোড় হবে ?

খ : প্রয়োজনীয় সূত্র

গুরুত্বপূর্ণ ধ্রুবকসমূহ

$\pi = 3.14159\ 26535$

$e = 2.71828\ 18284$

$e^{\pi} = 23.14069\ 26327$

$\pi^{e} = 22.4591577183$

$e^{e} = 15.15426\ 22414$

$\gamma = .57721\ 56649$ অয়লার ধ্রুবক

1 রেডিয়ান = 57.29577 95130

গুরুত্বপূর্ণ প্রোডাক্ট এবং ফ্যাক্টর

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \ldots + y^{2n})$

$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots + y^{2n})$

$x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots)$

বাইনোমিয়াল ফর্মুলা ও কোয়েফিসিয়ান্ট

$n! = 1, 2, \ldots n,\ 0! = 1$

$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n$

$(n+y)^n = \binom{n}{o}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

$\binom{n}{o} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots (-1)^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k} = 0$

$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$

$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$

$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

$\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}$

$= \sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$

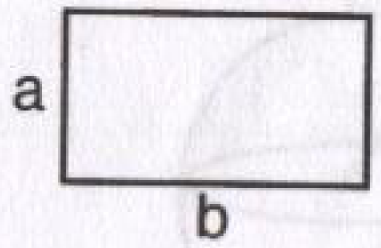
$(1)\binom{n}{1} + (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} + \ldots + (n)\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n.2$

$(1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - \ldots (-1)^{n+1}(n)\binom{n}{n}$

$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k\binom{n}{k} = 0$

জ্যামিতির সূত্রসমূহ

আয়তক্ষেত্র



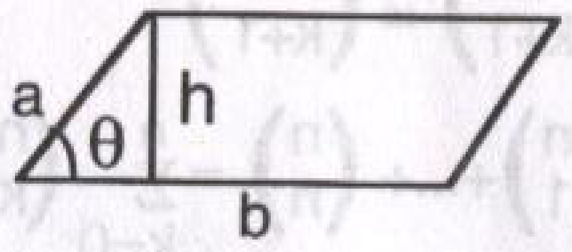
ক্ষেত্রফল = ab

পরিসীমা = 2 (a+b)

সামন্তরিক

ক্ষেত্রফল = $bh = ab\sin\theta$

পরিসীমা = $2(a+b)$

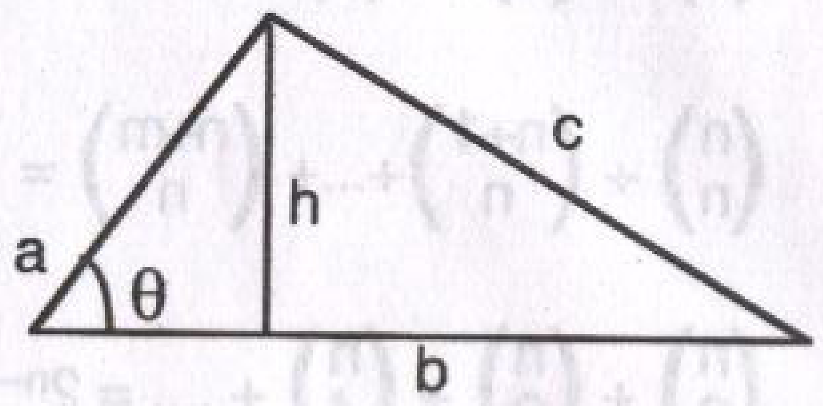


ত্রিভুজ

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin\theta$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

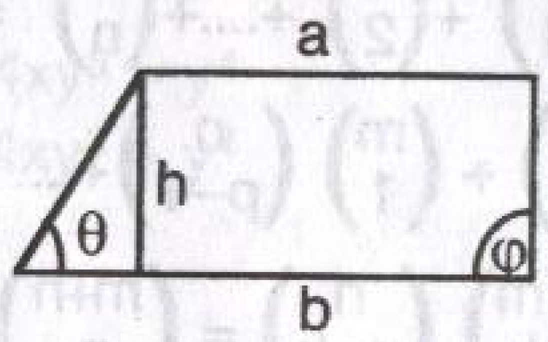
যেখানে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$



ট্র্যাপেজিয়াম

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}h(a+b)$

পরিসীমা = $a+b+h\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\right)$

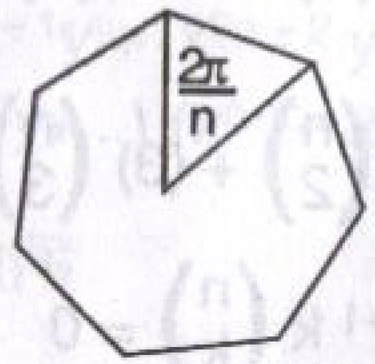


সুষম n–বহুভুজ (বাহুদৈর্ঘ্য b)

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}nb^2\cot\frac{\pi}{n}$

$= \frac{1}{4}nb^2\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$

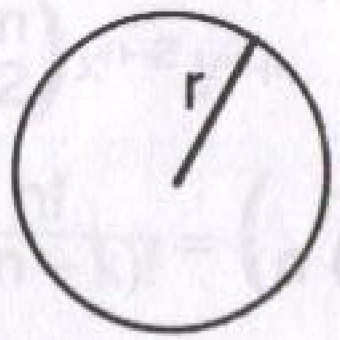
পরিসীমা = nb



r ব্যাসার্ধের বৃত্ত

ক্ষেত্রফল = πr^2

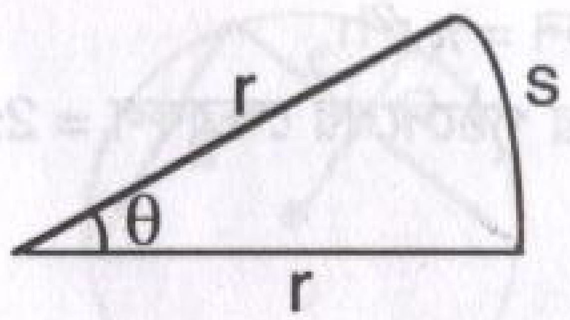
পরিসীমা = $2\pi r$



r ব্যাসার্ধের বৃত্তের চাপ

ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}r^2\theta$ (θ রেডিয়ানে)

চাপের দৈর্ঘ্য $s = r\theta$

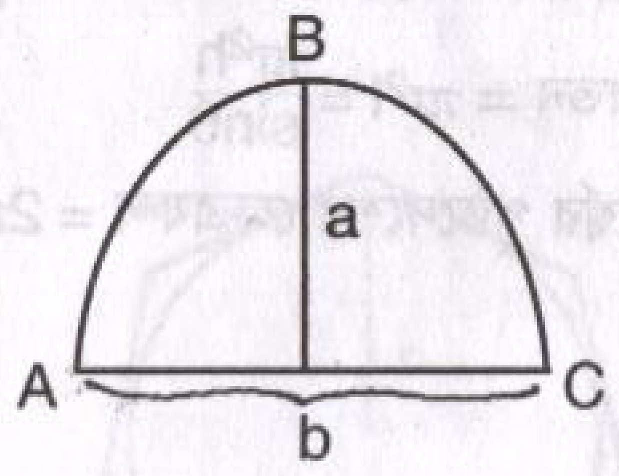


প্যারাবোলা

ক্ষেত্রফল = $\frac{2}{3}ab$

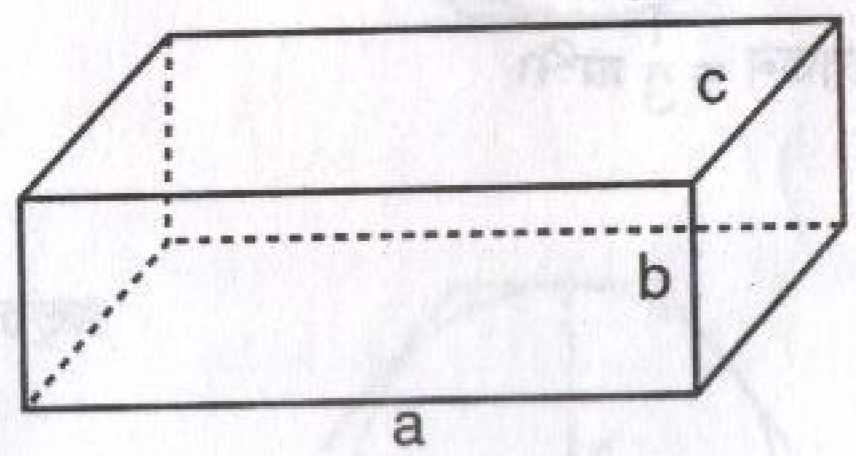
ABC চাপের দৈর্ঘ্য =

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2+16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+4a^2}}{b}\right)$$



আয়তাকার প্যারালেলেপিপেড

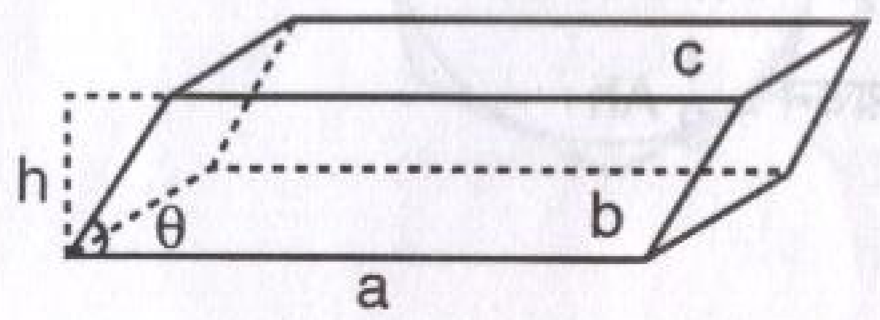
আয়তন = abc



পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + ac + bc)$

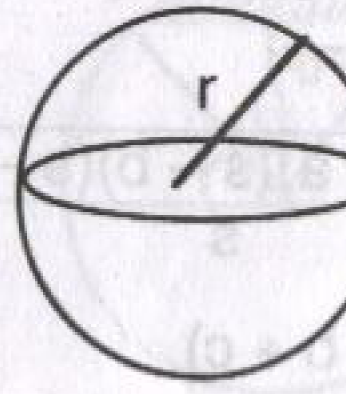
আয়তন = $Ah = abc\sin\theta$



r ব্যাসার্ধের গোলক

আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$

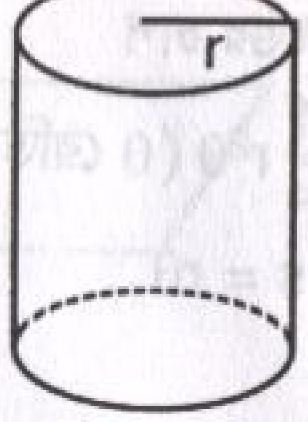
পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $2\pi r^2$



r ব্যাসার্ধ এবং h উচ্চতার সরল বৃত্তীয় সিলিন্ডার

আয়তন $= \pi r^2 h$

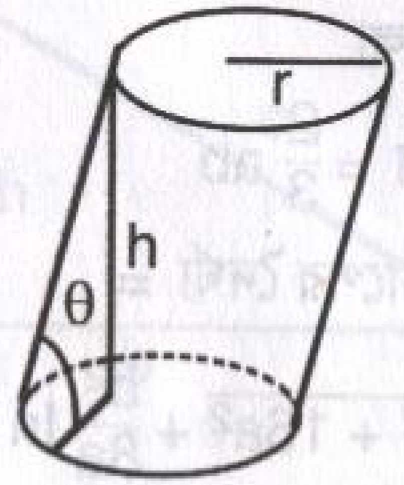
পার্শ্বের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$



r ব্যাসার্ধ এবং কৌণিক উচ্চতার বৃত্তীয় সিলিন্ডার

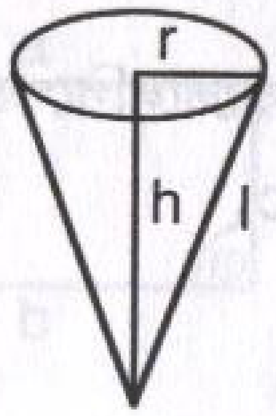
আয়তন $= \pi r^2 l = \dfrac{\pi r^2 h}{\sin\theta}$

পার্শ্বের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rl$



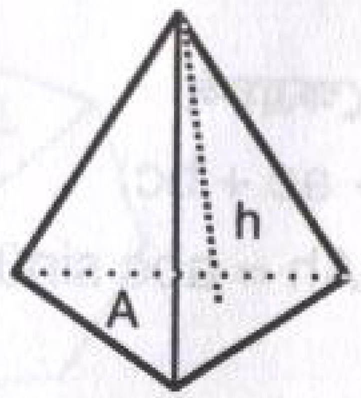
r ব্যাসার্ধ এবং h উচ্চতার সরল বৃত্তীয় কোণ

আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$



A ভূমি ও h উচ্চতাবিশিষ্ট পিরামিড

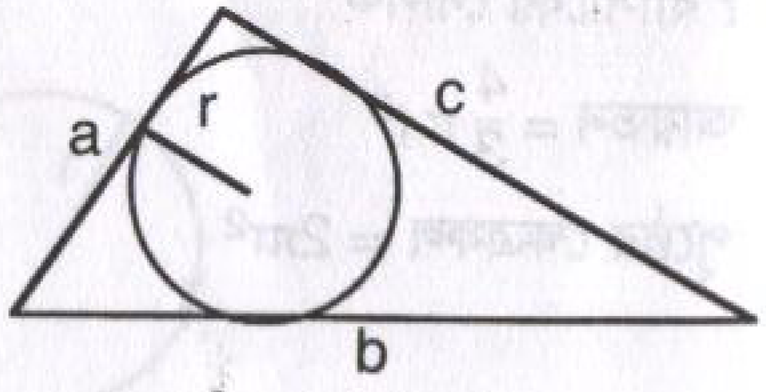
আয়তন $= \dfrac{1}{3} Ah$



অন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

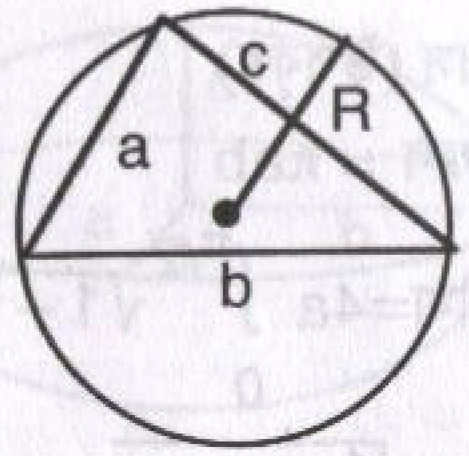
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

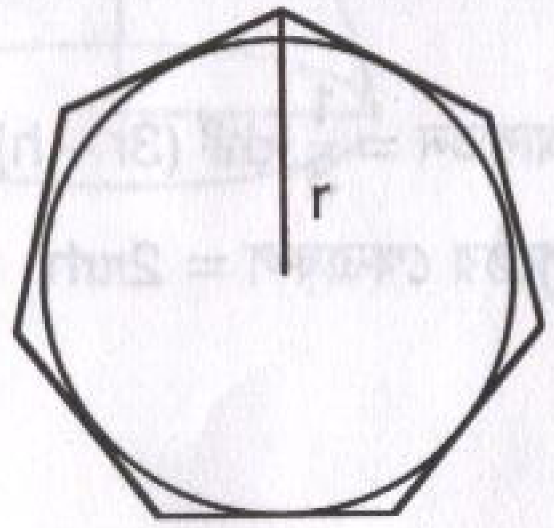
$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$



r ব্যাসার্ধের বৃত্তের অন্তর্লিখিত সুষম n বহুভুজ

ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} nr^2 \sin\dfrac{2\pi}{2} = \dfrac{1}{2} nr^2 \sin\dfrac{360^\circ}{n}$

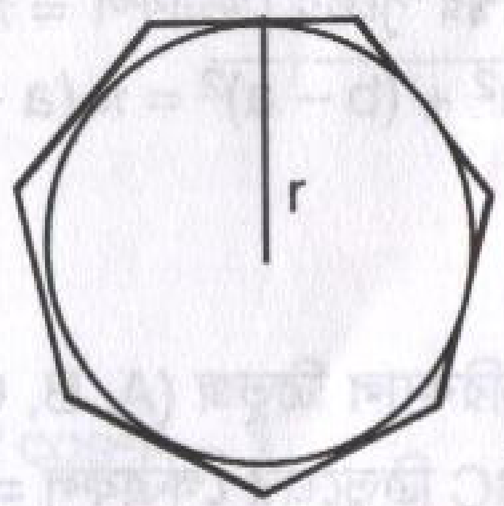
পরিসীমা $= 2nr \sin\dfrac{\pi}{n} = 2nr\sin\dfrac{180^\circ}{n}$



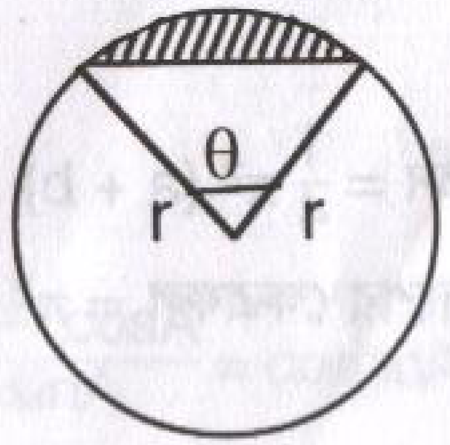
r ব্যাসার্ধের বৃত্তে পরিলিখিত সুষম n বহুভুজ

ক্ষেত্রফল $= nr^2 \tan\dfrac{\pi}{n}$

পরিসীমা $= 2nr \tan\dfrac{\pi}{n}$



ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$



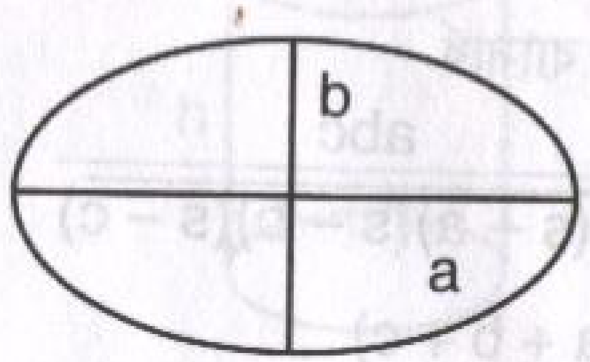
এলিপস (উপবৃত্ত)

ক্ষেত্রফল $= \pi ab$

পরিসীমা$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$

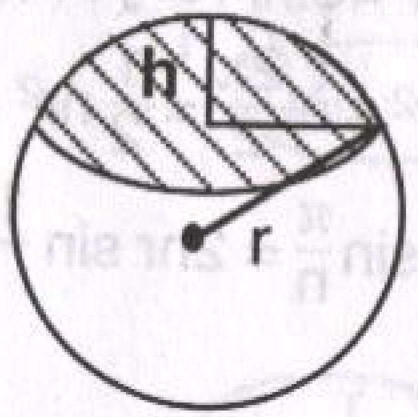
$\approx 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

যেখানে $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$



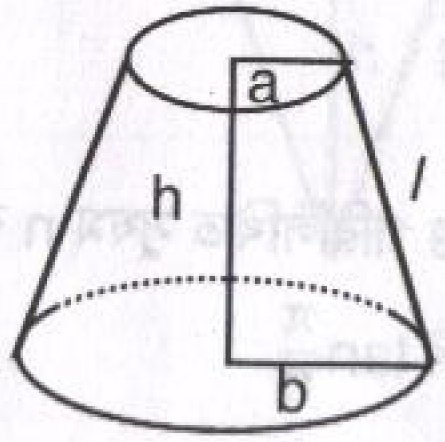
আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$



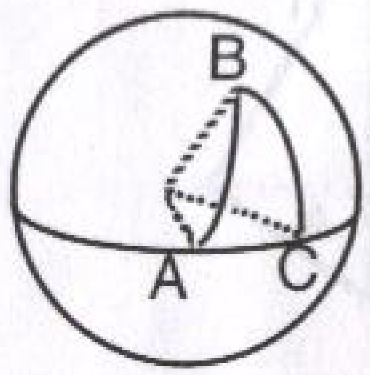
আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h (a^2 + ab + b^2)$

পার্শ্বের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi (a + b)$
$\sqrt{h^2 + (b - a)^2} = \pi (a + b) l$



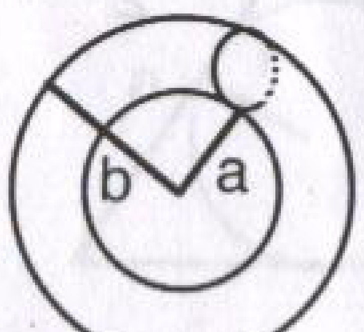
স্ফেরিক্যাল ত্রিভুজ (A, B, C কোণ)

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= (A + B + C - \pi) r^2$



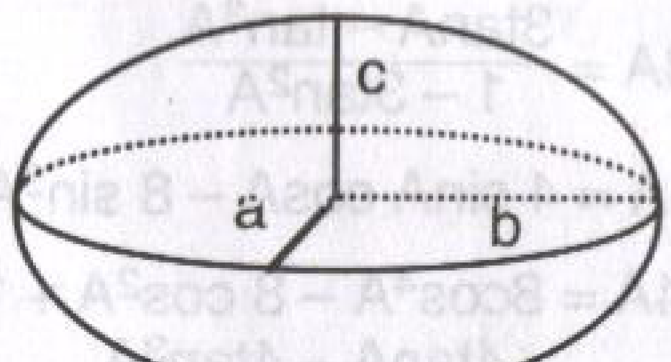
আয়তন $= \frac{1}{4}\pi^2 (a + b)(b - a)$

পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= \pi^2 (b^2 - a^2)$



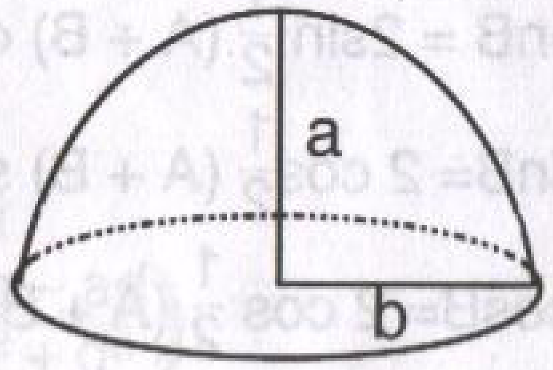
এলিপসয়েড

আয়তন $= \frac{4}{3}\pi abc$



প্যারাবলয়ড

আয়তন $= \frac{1}{2}\pi b^2 a$



ত্রিকোণমিতির ফর্মুলা

$\sin(-A) = -\sin A$

$\cos(-A) = \cos A$

$\tan(-A) = -\tan A$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$

$\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \pm 1}{\cot A \pm \cot B}$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

$\cos\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \cot A$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\sin 4A = 4 \sin A \cos A - 8 \sin^3 A \cos A$$

$$\cos 4A = 8\cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$$

$$\tan 4A = \frac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$$

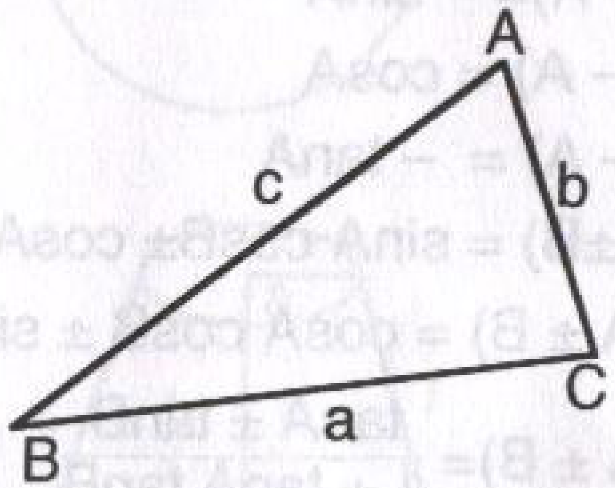
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

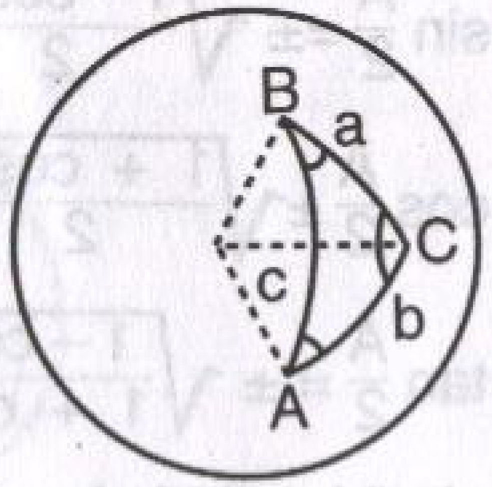
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$



$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

কমপ্লেক্স সংখ্যা

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^p = r^p(\cos p\theta + i\sin p\theta)$$

এক্সপনেনসিয়াল এবং লগারিদম ফাংশন

$$a^p.a^q = a^{p+q}$$

$$a^p/a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p\log_a M$$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

এ্যালজেবরায়িক সমীকরণ

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \qquad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S = \sqrt{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \qquad T = \sqrt{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T)$$

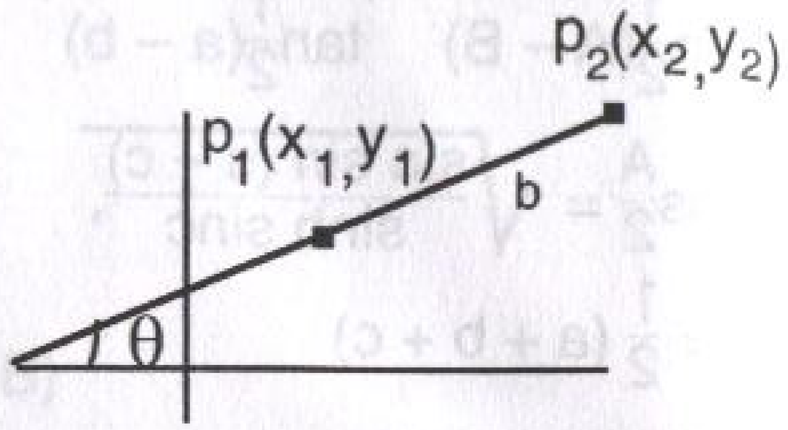
অ্যানালাইটিক্যাল জিওমেট্রির ফর্মুলা

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$m=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$



(x_1y_1) বিন্দু থেকে $Ax+By+C=0$ সরলরেখার ওপর লম্বদূরত্ব

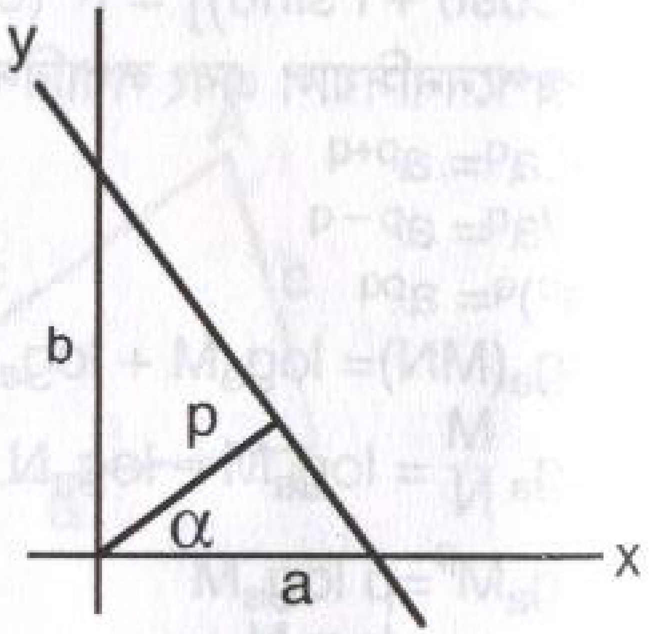
$$=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

m_1, m_2 স্লোপ সংবলিত দুটি সরলরেখার মধ্যে কোণ ψ,

$$\tan\psi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

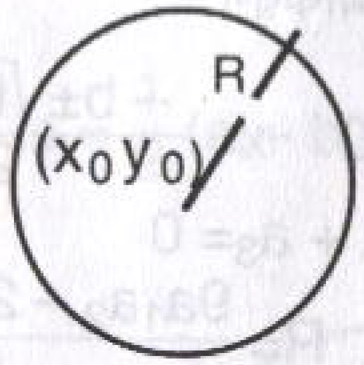
(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) বিন্দু (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে) সংবলিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\pm$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$



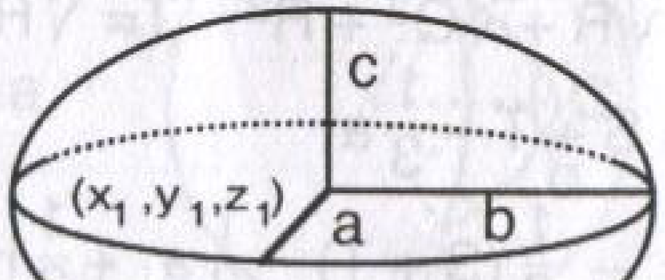
বৃত্তের সমীকরণ

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

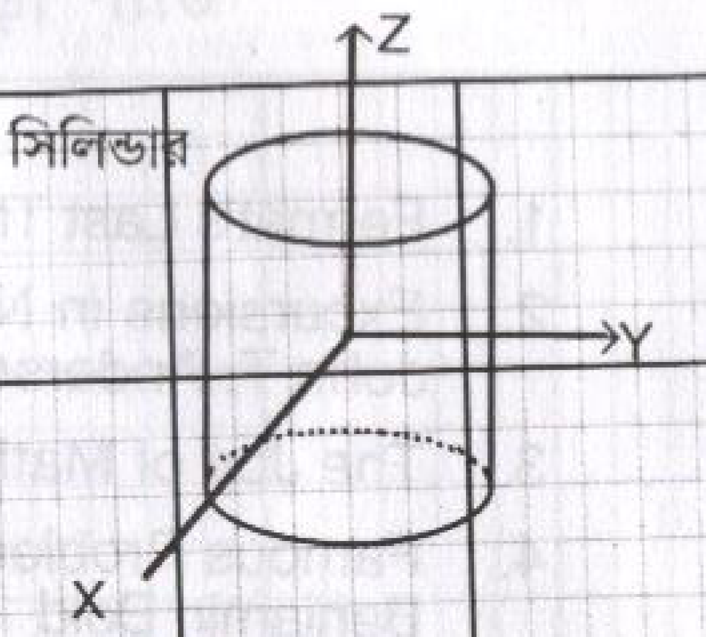


এলিপসয়েড

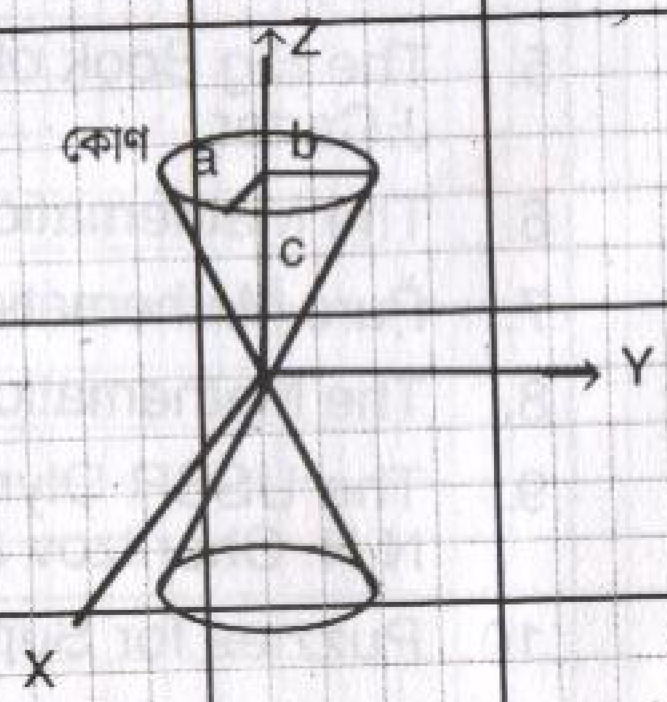
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

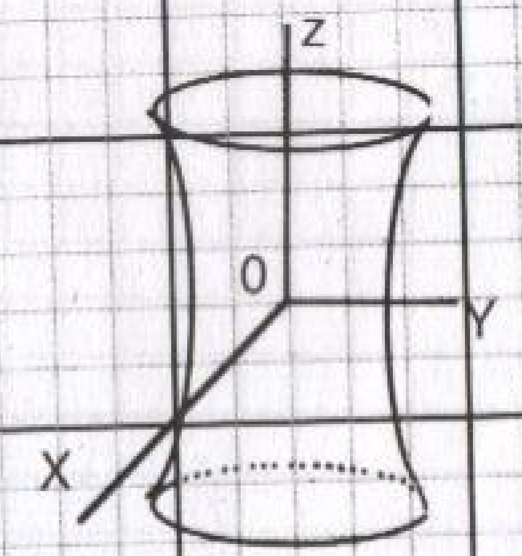


$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$



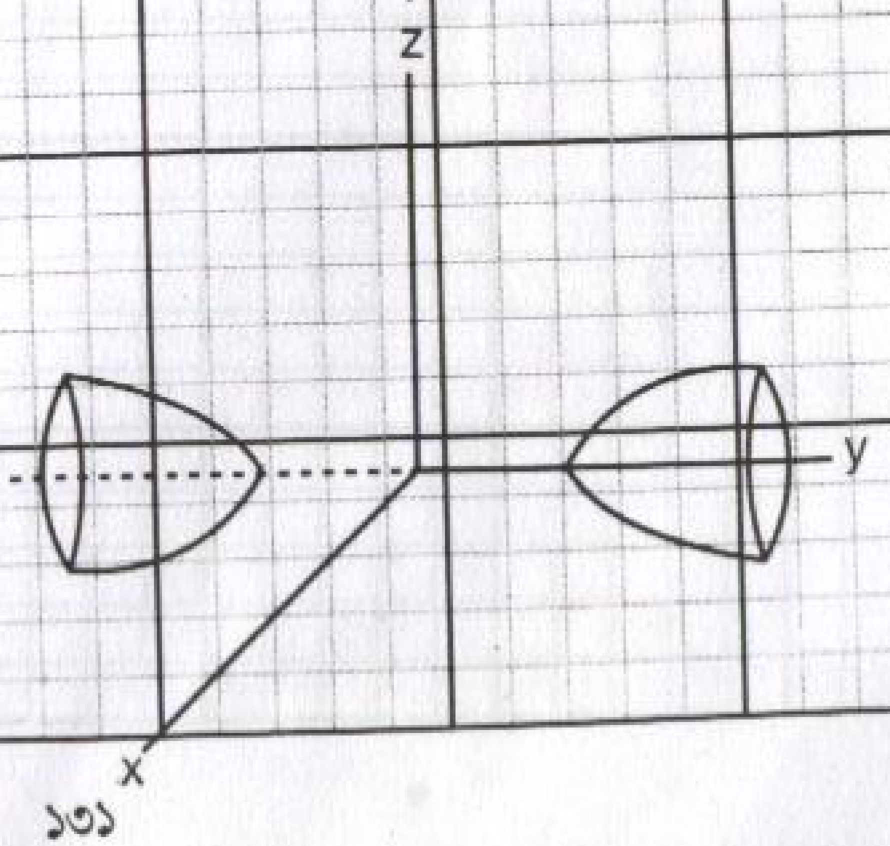
হাইপারবলয়ড

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



দুই শীটের হাইপারবলয়ড

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



গ : গ্রন্থ তালিকা

1. Fermat's Last Theorem by Simon Singh
2. Excursions in Number Theory by C. Stanley Ogilvy and John T. Anderson
3. The Joy of Mathematics by Theoni Pappas
4. Famous Problems of Geometry and How to Solve them by Benjamin Bold
5. The Big Book of IQ Tests by Norman Sullivan and Philip J.Carter
6. The Mathematical Tourist by Ivars Peterson
7. Pure Mathematics, The school Mathematics Project.
8. The Mathematical Universe by William Dunham
9. The USSR Olympiad Problem Book by D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov and I.M. Yaglom
10. Puzzles for Super Brains by Steve Odell.

ঘ : খসড়া প্যাড